Université Mohammed Kheider - Biskra
Faculté des sciences exactes et sciences de la nature et de la vie
Département de Mathématiques
Module: Analyse 03 (2ème année Licence Maths 2023/2024)

Série N° 01

Exercice 1 *Déterminer la nature des séries numériques suivantes en trouvant les suites des sommes partielles associées :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)}, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{-n}}{2^{n+1}}, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 2

1. *Etudier la nature des séries dont le terme général u_n est donné ci-dessous (comparaison à une série géométrique)*

$$a) \quad u_n = \frac{4^n+n^4}{5^n+2^n}, \quad b) \quad u_n = \left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3n}\right)^n, \quad c) u_n = \frac{a^n}{(1+a)(1+a)^2 \dots (1+a)^n}, (a>0).$$

2. *Etudier la nature des séries dont le terme général u_n est donné ci-dessous (comparaison à une série de Riemann)*

$$a) \quad u_n = \left(1-\cos\frac{1}{n}\right), \quad b) \quad u_n = \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} - 1 \quad , \quad c) \quad u_n = n^{-1-2/n}.$$

3. *Etudier la nature des séries dont le terme général u_n est donné ci-dessous (régles de Cauchy et de d'Alembert)*

$$a) \quad u_n = \frac{n!}{a^n}, (a>0) \quad b) \quad u_n = \frac{n!}{n^n} \quad c) \quad u_n = \frac{a^n}{n^a}, (a>0) \quad d) \quad u_n = \left(\frac{\sin^2(n)}{n}\right)^n$$

4. *Etudier la nature des séries dont le terme général u_n est donné ci-dessous (comparaison à une série de Bertrand)*

$$a) \quad u_n = \frac{1}{\ln(n!)} \qquad b) \quad u_n = \left(1-e^{1/n^2}\right)\sqrt{\ln n} \qquad c) \quad u_n = n^{n^{-a}} - 1, \ \textit{avec} \ (a>0)$$

Exercice 3 *Etudier la convergence absolue - la semi convergence et la divergence des séries suivantes :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin 2n}{n+n^3} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\cos n}{\sqrt{n}}\right) \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \arctan\frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n+1} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right).$$

Exercice 4 *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries positives convergentes. Qelle est la nature des séries suivantes:*

$$\left(\sum \sqrt{u_n v_n}\right) \qquad \left(\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}\right) \qquad \left(\sum \frac{u_n}{1-v_n}\right) \qquad \left(\sum v_n^2\right).$$