جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
قسم الرياضيات

السنة الأولى MI
المدة : ساعة
2021/2020

الامتحان النهائي في الجبر 1

التمرين 01:[08 نقاط]

ليكن التطبيق $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرف بـ: $f(x) = x^3 - 3x + 2$

ولتكن المجموعتان $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ و $B = \{0, 2\}$

1) احسب $f(\mathbb{R}),\ f^{-1}(B), f(A)$.
2) هل f متباين ؟ علل.
3) بين أن f غامر.

التمرين 02:[12 نقاط]

لتكن E مجموعة غير خالية، $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$ (أي A, B, C أجزاء من E)، نذكر أن:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \quad \text{و} \quad A \setminus B = A \cap B^c$$

1) تحقق أن: $A \Delta B = B \Delta A$ و أحسب $A \Delta \emptyset$ و $A \Delta A$.
2) بين أن: $A \Delta B = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$ و أحسب $(A \Delta B)^c$.
3) بين أن: $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.
4) استنتج أن: $(\mathcal{P}(E), \Delta)$ زمرة تبديلية.
5) بين أن: $A = B \Delta C \Rightarrow B = A \Delta C$
6) نعرف في $\mathcal{P}(E)$ العلاقة $\mathcal{R}$ كما يلي:

$$A \mathcal{R} B \Leftrightarrow \exists D \in \mathcal{P}(E): A = B \Delta D$$

بين أن: $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ.

تصحيح الامتحان النهائي جبر 1 2021/2020

التمرين الأول:

1) $A = \{-2,-1,0,1,2\}$ ، $f(-2)=0$، $f(-1)=4$، $f(0)=2$
$f(1)=0$ $f(2)=4$

$\boxed{f(A) = \{0,2,4\}}$ → (02,5)

$B = \{0,2\}$ ، $f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} / f(x)=0 \vee f(x)=2\}$
$= \{x \in \mathbb{R} / f(x)=0\} \cup \{x \in \mathbb{R} / f(x)=2\}$
$= f^{-1}(\{0\}) \cup f^{-1}(\{2\})$

نلاحظ من السؤال السابق أن -2 ؛ 1 جذران لـ $f(x)$
أي بعد التحليل على كتابة $f(x) = (x+2)(x-1)^2$ (01)

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=-2 \vee x=1 \Rightarrow f^{-1}(\{0\}) = \{1,-2\}$ (01)

$f(x)=2 \Leftrightarrow x^3-3x+2=2 \Leftrightarrow x^3-3x=0 \Leftrightarrow x(x^2-3)=0$
$\Leftrightarrow x=0 \vee x=\pm\sqrt{3} \Leftrightarrow f^{-1}(\{2\}) = \{0,-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$ (01)

وبالتالي

$\boxed{f^{-1}(B) = \{-2,-\sqrt{3},0,1,\sqrt{3}\}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

وبالتالي

$\boxed{f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}}$ → (01)

2) f ليس متباين لأن $f(-2)=f(1)=0$ (01)

3) f غامر لأن $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ ← (0,5)

التمرين الثاني :

(1

$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = B \triangle A$ ← (0,5)

$A \triangle \phi = (A \setminus \phi) \cup (\phi \setminus A) = A \cup \phi = A$ ← (0,5)

$A \triangle A = (A \setminus A) \cup (A \setminus A) = \phi \cup \phi = \phi$ ← (0,5)

(2

$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$

$= [(A \cap B^c) \cup B] \cap [(A \cap B^c) \cup A^c]$

$= [(A \cup B) \cap (B \cup B^c)] \cap [(A \cup A^c) \cap (B^c \cup A^c)]$

$= (A \cup B) \cap E \cap E \cap (A \cap B)^c$

$= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$ ← (0,5)

ومنه

$(A \triangle B)^c = [(A \cup B) \cap (A \cap B)^c]^c$ ← (0,5)

$= (A \cup B)^c \cup (A \cap B) = (A^c \cap B^c) \cup (A \cap B)$

(3

$(A \triangle B) \triangle C = [(A \triangle B) \cap C^c] \cup [C \cap (A \triangle B)^c]$

$= [[(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)] \cap C^c] \cup [C \cap [(A \cup B)^c \cup (A \cap B)]]$

$= [(A \cap B^c \cap C^c) \cup (B \cap A^c \cap C^c)] \cup [(C \cap A^c \cap B^c) \cup (C \cap A \cap B)]$

$$(A \triangle B) \triangle C = (A \cap B^c \cap C^c) \cup (B \cap A^c \cap C^c) \cup (C \cap A^c \cap B^c) \cup (A \cap B \cap C)$$

(0,5 + 1)

$$A\Delta(B\Delta C) = [A\cap(B\Delta C)^c]\cup[(B\Delta C)\cap A^c]$$

$$= [A\cap[(B^c\cap C^c)\cup(B\cap C)]]\cup[[(B\cap C^c)\cup(C\cap B^c)]\cap A^c]$$

$$A\Delta(B\Delta C) = (A\cap B^c\cap C^c)\cup(A\cap B\cap C)\cup(B\cap C^c\cap A^c)\cup(C\cap B^c\cap A^c)$$

بالمقارنة نجد أن (0,1)

$$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$$

4) من خلال السؤال 1) Δ تبديلية ← (0,5)

ومن خلال السؤال 3) Δ تجميعية ← (0,5)

ومن خلال السؤال 1) ϕ عنصر حيادي ← (0,5)

ولكل عنصر A نظير هو نفسه A ← (0,5)

إذن $(P(E),\Delta)$ زمرة تبديلية

5) إذا كان $A = B\Delta C$ فإن

$$A\Delta C = (B\Delta C)\Delta C = B\Delta(C\Delta C) = B\Delta\phi = B$$ ← (01)

6) R علاقة تكافؤ؟

• انعكاسية؟

$\forall A\in P(E)\quad A = A\Delta\phi$

إذن يوجد $D = \phi$ من $A = A\Delta D$

ومنه ARA ← (0,5)

• تناظرية؟

إذن انعكاسية

$ARB \Rightarrow BRA$?

$ARB \Rightarrow \exists D\in P(E): A = B\Delta D$

$\Rightarrow B = A\Delta D$ (حسب السؤال 3)

$\Rightarrow BRA$ ← (01)

• متعدية؟

$ARB \wedge BRC \Rightarrow \exists D, D'\in P(E)$; $A = B\Delta D$, $B = C\Delta D'$

$\Rightarrow A = (C\Delta D')\Delta D = C\Delta(D\Delta D')$

إذن ARC ← (01)

(3)

$$A\Delta(B\Delta C) = [A\cap(B\Delta C)^c]\cup[(B\Delta C)\cap A^c]$$

$$= [A\cap[(B^c\cap C^c)\cup(B\cap C)]]\cup[[(B\cap C^c)\cup(C\cap B^c)]\cap A^c]$$

$$A\Delta(B\Delta C) = (A\cap B^c\cap C^c)\cup(A\cap B\cap C)\cup(B\cap C^c\cap A^c)\cup(C\cap B^c\cap A^c)$$

بالمقارنة نجد أن (0,1) $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$

4) من خلال السؤال 1) Δ تبديلية ← (0,5)

ومن خلال السؤال 3) Δ تجميعية ← (0,5)

ومن خلال السؤال 1) ϕ عنصر حيادي ← (0,5)

ولكل عنصر A نظير هو نفسه A ← (0,5)

إذن $(P(E),\Delta)$ زمرة تبديلية

5) إذا كان $A = B\Delta C$ فإن

$$A\Delta C = (B\Delta C)\Delta C = B\Delta(C\Delta C) = B\Delta\phi = B$$ ← (01)

6) R علاقة تكافؤ؟

• انعكاسية؟

$\forall A\in P(E)\quad A = A\Delta\phi$

إذن يوجد $D = \phi$ من $A = A\Delta D$

ومنه ARA ← (0,5)

• تناظرية؟

إذن انعكاسية

$ARB \Rightarrow BRA$?

$ARB \Rightarrow \exists D\in P(E): A = B\Delta D$

$\Rightarrow B = A\Delta D$ (حسب السؤال 2)

$\Rightarrow BRA$ ← (01)

• متعدية؟

$ARB \wedge BRC \Rightarrow \exists D, D'\in P(E)$; $A = B\Delta D$, $B = C\Delta D'$

$\Rightarrow A = (C\Delta D')\Delta D = C\Delta(D\Delta D')$

إذن ARC ← (01) (3)

$$A \Delta (B \Delta C) = [A \cap (B \Delta C)^c] \cup [(B \Delta C) \cap A^c]$$

$$= [A \cap [(B^c \cap C^c) \cup (B \cap C)]] \cup [[(B \cap C^c) \cup (C \cap B^c)] \cap A^c]$$

$$A \Delta (B \Delta C) = (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A \cap B \cap C) \cup (B \cap C^c \cap A^c) \cup (C \cap B^c \cap A^c)$$

(0,1) بالمقارنة نجد أن

$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$$

4) من خلال السؤال 1) Δ تبديلية ← (0,1)

ومن خلال السؤال 3) Δ تجميعية ← (0,5)

ومن خلال السؤال 1) ϕ عنصر حيادي ← (0,5)

ولكل عنصر A نظير هو نفسه A ← (0,5)

إذن $(P(E), \Delta)$ زمرة تبديلية

5) إذا كان $A = B \Delta C$ فإن

$$A \Delta C = (B \Delta C) \Delta C = B \Delta (C \Delta C) = B \Delta \phi = B$$ ← (01)

6) R علاقة تكافؤ؟

• انعكاسية؟

$\forall A \in P(E) \quad A = A \Delta \phi$

إذن يوجد $D = \phi$ من $A = A \Delta D$

ومنه $A R A$ ← (0,5)

إذن انعكاسية

• تناظرية؟

$A R B \Rightarrow B R A$?

$A R B \Rightarrow \exists D \in P(E) : A = B \Delta D$

$\Rightarrow B = A \Delta D$ (حسب السؤال 2)

$\Rightarrow B R A$ ← (01)

• متعدية؟

$A R B \wedge B R C \Rightarrow \exists D, D' \in P(E) ; \begin{cases} A = B \Delta D \\ B = C \Delta D' \end{cases}$

$\Rightarrow A = (C \Delta D') \Delta D = C \Delta (D \Delta D')$

إذن $A R C$ ← (01)

(3)