جامعة محمد خيضر بسكرة

كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة

قسم الرياضيات

2023/01/18

السنة الأولى (MI+رياضيات)

مقياس جبر1

2022/2023

الامتحان النهائي

9/9

التمرين 01: نعتبر في المجموعة $\mathbb{R}$ العلاقة $\mathcal{R}$ المعرفة كما يلي:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^4 - x^2 = y^4 - y^2$$

1) بين أن $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ على $\mathbb{R}$. 5,5

0,5 1

2) أوجد أصناف تكافؤ عنصر x $(x \in \mathbb{R})$ ثم استنتج $\dot{(0{,}5)}$ ، $\dot{2}$.

2

التمرين 02: نزود المجموعة $I =]1, +\infty[$ بقانون التركيب $\star$ المعرف بـ:

6/6

$$\forall\ a, b\ \in I:\ a \star b = \sqrt{(a^2-1)(b^2-1)+1}$$

1) بين أن $\star$ قانون تركيب داخلي. 1

2) ليكن التطبيق f المعرف كما يلي:

$$f:\ \mathbb{R}_+^* \to I$$
$$x \mapsto f(x) = \sqrt{1+x}$$

1 1

أ) بين أن f تماثل (أي تشاكل تقابلي) من الزمرة $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ نحو $(I, \star)$.

0,75 0,75 0,75

ب) استنتج أن $(I, \star)$ زمرة، استنتج العنصر الحيادي والعنصر النظير.

3) بين أن المجموعة $E = \left\{\sqrt{1+2^m}\ /m \in \mathbb{Z}\right\}$ عبارة عن زمرة جزئية من $(I, \star)$. 0,75

التمرين 03: لتكن $(G, \star)$ و $(G', \top)$ زمرتان و $f : G \longrightarrow G'$ تشاكل زمري، أثبت أن:

5/5

1) $f(e) = e'$ (حيث e هو العنصر الحيادي في G بالنسبة لـ $\star$ و e' هو العنصر الحيادي في G' بالنسبة لـ $\top$) 1

2) $f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$ 1

3) إذا كان H زمرة جزئية من G فإن $f(H)$ زمرة جزئية من G' 1,5

4) f غامر $\Leftrightarrow \quad f(G) = G'$ 1,5

بالتوفيق

السنة الأولى (MI+رياضيات)

مقياس جبر1

2022/2023

جامعة محمد خيضر بسكرة

كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة

قسم الرياضيات

2023/01/18

التصحيح النموذجي للامتحان النهائي

التمرين 1 9/3

$\forall x,y \in \mathbb{R}: x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^4-x^2=y^4-y^2$

1) إثبات أن R علاقة تكافؤ

أ) R انعكاسية :

$\forall x \in \mathbb{R}: x\mathcal{R}x$?

1

$\forall x \in \mathbb{R}: x^4-x^2=x^4-x^2 \Rightarrow x\mathcal{R}x.$

ب) R تناظرية :

$\forall x,y \in \mathbb{R}: x\mathcal{R}y \overset{?}{\Rightarrow} y\mathcal{R}x$

$x\mathcal{R}y \Rightarrow x^4-x^2=y^4-y^2$ 2

$\Rightarrow y^4-y^2=x^4-x^2$

$\Rightarrow y\mathcal{R}x$

د) R متعدية :

$\forall x,y,z \in \mathbb{R}: \begin{cases} x\mathcal{R}y \\ \wedge \\ y\mathcal{R}z \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow} x\mathcal{R}z$

2 لدينا

$\begin{cases} x\mathcal{R}y \\ \wedge \\ y\mathcal{R}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4-x^2=y^4-y^2 \\ y^4-y^2=z^4-z^2 \end{cases}$

$\Rightarrow x^4-x^2=z^4-z^2 \Rightarrow x\mathcal{R}z$

من (أ) و(ب) و(د) نستنتج أن R علاقة تكافؤ

(2

$$\dot{x}=\{y\in\mathbb{R} : y\,\mathcal{R}\,x\}$$
$$=\{y\in\mathbb{R} : y^4-y^2=x^4-x^2\}.$$

$$y^4-y^2=x^4-x^2$$

$$\Rightarrow\quad y^4-x^4-y^2+x^2=0.$$

$$\Rightarrow\quad (y^2)^2-(x^2)^2-(y^2-x^2)=0$$ 2

$$\Rightarrow\quad (y^2-x^2)(y^2+x^2)-(y^2-x^2)=0.$$

$$\Rightarrow\quad (y^2-x^2)\left[y^2+x^2-1\right]=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases} y^2-x^2=0\\ \quad\vee\\ y^2+x^2-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y^2=x^2\\ \quad\vee\\ y^2=1-x^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} y=\pm\, x\\ \quad\vee\\ y=\pm\sqrt{1-x^2}\end{cases}\qquad si:\ 1-x^2\geq 0.$$

$$\Rightarrow\begin{cases} y=\pm\, x\\ \quad\vee\\ y=\pm\sqrt{1-x^2}\end{cases}\quad /\quad x\in[-1,1]$$

ومنه : اذا كان : $x\in[-1,1]$ فإن : $\dot{x}=\{-x,+x,-\sqrt{1-x^2},+\sqrt{1-x^2}\}$

اذا كان $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ فإن : $\dot{x}=\{-x,x\}$

الاستنتاج :

1 $\dot{(0,5)}=\{-0,5\,;+0,5\,;-\sqrt{1-(0,5)^2}\,;+\sqrt{1+(0,5)^2}\}$

0,5 $\dot{2}=\{-2,2\}.$

التمرين ع ٥ $\frac{6}{6}$ $I =]1, +\infty[$ و $*$ العملية المعرفة ب

$$\forall a, b \in I : a * b = \sqrt{(a^2-1)(b^2-1)+1}$$

1) إثبات أن $*$ قانون تركيب داخلي:

$a > 1 \wedge b > 1 \Rightarrow a * b > 1$ ؟

$$\begin{cases} a > 1 \\ b > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 > 1 \\ b^2 > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2-1 > 0 \\ b^2-1 > 0 \end{cases}$$ 1

$$\Rightarrow (a^2-1)(b^2-1) > 0$$

$$\Rightarrow (a^2-1)(b^2-1)+1 > 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{(a^2-1)(b^2-1)+1} > 1$$

$$\Rightarrow a * b > 1$$

2)

$$f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow I$$
$$x \longmapsto f(x) = \sqrt{1+x}$$

f تشاكل ؟

$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$;

$I_1 = f(x \times y) \overset{?}{=} f(x) * f(y) = I_2$

لدينا

$$I_1 = f(x \times y) = \sqrt{1+xy}$$
$$I_2 = f(x) * f(y) = \sqrt{(f(x)^2-1)(f(y)^2-1)+1}$$

1

$$= \sqrt{((\sqrt{1+x})^2-1)((\sqrt{1+y})^2-1)+1}$$
$$= \sqrt{xy+1}$$

ومنه $I_1 = I_2$ إذا f تشاكل

$\forall y \in I, \exists ! x \in \mathbb{R}_+^* : f(x)=y$? $\Longleftrightarrow$ (f تقابل)

$\sqrt{1+x} = y \Rightarrow 1+x = y^2 \Rightarrow x = y^2-1$

لدينا $y>1 \Rightarrow y^2>1 \Rightarrow y^2-1>0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}_+^*$ 1

إذا المعادلة $f(x)=y$ تقبل حل وحيد في $\mathbb{R}_+^*$

ومنه f تقابل

ب) استنتاج أن $(I,*)$ زمرة ؟

بما أن f تشاكل و $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ زمرة إذا $(f(\mathbb{R}_+^*),*)$ زمرة وبما أن f غامر فإن $f(\mathbb{R}_+^*)=I$ ومنه 0,75 $(I,*)$ زمرة.

العنصر الحيادي: بما أن 1 هو العنصر الحيادي في مجموعة البدأ وبما أن f تشاكل فإن صورة العنصر الحيادي بالنسبة لمجموعة البدأ هو العنصر الحيادي بالنسبة لمجموعة الوصول أي 0,75

$f(1) = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\sqrt{2}$ هو العنصر الحيادي في $(I,*)$

العنصر النظير:

$\forall y \in I, \exists x \in I : f(x)=y$

إيجاد نظير y

$$y^{-1} = (f(x))^{-1} = (f(x^{-1})) = \sqrt{1+\frac{1}{x}} = \sqrt{1+\frac{1}{y^2-1}}$$

0,75

(3 إثبات أن

ط1) $E = \{\sqrt{1+2^n} \;/\; n \in \mathbb{Z}\}$ زمرة جزئية من $(I,*)$

(أ $n = 0 \Rightarrow \sqrt{1+2^0} = \sqrt{2} \in E$

(ب $\forall y_1, y_2 \in E \Rightarrow y_1 * y_2 \in E$

لدينا $y_1 * y_2 = \sqrt{(y_1^2-1)(y_2^2-1)+1}$

$y_1 \in E \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{Z} : y_1 = \sqrt{1+2^{n_1}}$

$y_2 \in E \Rightarrow \exists n_2 \in \mathbb{Z} : y_2 = \sqrt{1+2^{n_2}}$

0.75

ومنه

$y_1 * y_2 = \sqrt{2^{n_1} \times 2^{n_2} + 1}$

$= \sqrt{1+2^{n_1+n_2}} = \sqrt{1+2^{n_3}} \;/\; n_3 = n_1+n_2 \in \mathbb{Z}$

إذا $y_1 * y_2 \in E$

(د $\forall y \in E \Rightarrow y^{-1} \in E$

لدينا $y \in E \Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z} : y = \sqrt{2^n+1}$

$\Rightarrow y^{-1} = (f(2^n))^{-1}$

$= f(2^{-n}) = \sqrt{2^{-n}+1}$

$= \sqrt{2^{n'}+1} \;/\; n' = -n$

ومنه $y^{-1} \in E$

من (أ) و(ب) و(د) نستنتج أن $(E,*)$ زمرة جزئية من $(I,*)$

ط2) نعرف H كما يلي

$H = \{2^n \;/\; n \in \mathbb{Z}\}$

نلاحظ أن $f(H) = E$

لدينا $(H,\times)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ لأن

$2^0 = 1 \in H$ (1
$2^{m_1}, 2^{m_2} \in H \Rightarrow 2^{m_1} \times 2^{m_2} = 2^{m_1+m_2} \in H$ (2
$2^{m_1} \in H \Rightarrow 2^{-m_1} \in H$ (3

لأن H ز.ز

برهان f تشاكل إذا $f(H) = E$ ز.ز من $(I, *)$

التمرين 3 $5/5$

$f : G \longrightarrow G'$ تشاكل

1) إثبات أن $f(e) = e'$

لدينا

$e * e = e$
$\Rightarrow f(e * e) = f(e)$
$\Rightarrow f(e) \top f(e) = f(e)$
نركب $[f(e)]^{-1}$
1
$\Rightarrow \underbrace{[f(e)]^{-1} \top f(e)}_{e'} \top f(e) = [f(e)]^{-1} \top f(e)$
$\Rightarrow e' \top f(e) = e'$
$\Rightarrow f(e) = e'$

2) إثبات أن
$f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$

لدينا

$x * x^{-1} = e$
1
$\Rightarrow f(x * x^{-1}) = f(e)$
$\Rightarrow f(x) \top f(x^{-1}) = f(e)$
نركب $[f(x)]^{-1}$
$\Rightarrow [f(x)]^{-1} \top [f(x)] \top f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1} \top f(e)$
$\Rightarrow f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$

3) H ز ج من G $\Leftarrow$ $f(H)$ ز ج من G'

أ) العنصر الحيادي $e \in H \Rightarrow f(e) \in f(H) \Rightarrow e' \in f(H)$

ب) T عملية داخلية في $f(H)$

$\forall y_1, y_2 \in f(H) \overset{?}{\Rightarrow} y_1 T y_2 \in f(H)$

لدينا $y_1, y_2 \in f(H) \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in H : y_1 = f(x_1) \wedge y_2 = f(x_2)$

$\Rightarrow y_1 T y_2 = f(x_1) T f(x_2)$

$= f(x_1 * x_2) \in f(H)$

لأن $x_1 * x_2 \in H$

د) $\forall y \in f(H) \Rightarrow y^{-1} \in f(H)$

لدينا $y \in f(H) \Rightarrow \exists x \in H ; y = f(x)$

$\Rightarrow y^{-1} = [f(x)]^{-1} = f(x^{-1}) \in f(H)$

لأن $x^{-1} \in H$

من أ و ب و د نستنتج أن $f(H)$ ز ج من (G', T)

4) f غامر $\Longleftrightarrow$ $f(G) = G'$

أ) $\Leftarrow$ ؟ نفرض أن f غامر ونبين أن $f(G) = G'$

لدينا $f(G) \subset G'$ بقي إثبات أن $G' \subset f(G)$

$y \in G' \overset{\text{غامر}}{\Rightarrow} \exists x \in G : f(x) = y \Rightarrow y = f(x) \in f(G)$

إذا $G' \subset f(G)$ ومنه $f(G) = G'$

ب) $\Rightarrow$ ؟ نفرض أن $f(G) = G'$ ونبين أن f غامر

$y \in G' = f(G) \Rightarrow \exists x \in G : y = f(x)$

ومنه f غامر