جامعة محمد خيضر
قسم الرياضيات 2021/2020
2021/01/20

الاسم واللقب:..........................

الفوج:.....
السنة الأولى MI
المقياس: جبر1.

07/07

تصحيح فرض رقم 01

تمرين 01:

1) باستخدام جدول الحقيقة برهن أن: $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \left(\left(P \wedge \overline{Q}\right) \Rightarrow \overline{P}\right)$

2) لتكن القضايا التالية:

a) $(\pi \in \mathbb{Q}) \vee (5 = 2^2)$

b) $\forall x \in \mathbb{C},\ x^2 + 1 \neq 0$

c) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists\, y \in \mathbb{R}: x > y$

d) $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}: x > y$

هل هذه القضايا صحيحة أم خاطئة؟ أعط نفيها.

3) لتكن $x_0 \in \mathbb{R}$ و f دالة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$. أعط العكس النقيض للقضية المنطقية التالية:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R},\quad |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

تمرين 02:

برهن بالتراجع أن: $\forall n \in \mathbb{N}\ 2^n \geq n$

تمرين 01:

1) باستخدام جدول الحقيقة نبرهن أن: $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \wedge \overline{Q}) \Rightarrow \overline{P})$

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P \Rightarrow Q$	$P \wedge \overline{Q}$	$(P\wedge\overline{Q}) \Rightarrow \overline{P}$	$① \Leftrightarrow ②$
1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1
		0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25

1,5

ومنه: $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \wedge \overline{Q}) \Rightarrow \overline{P})$

2) هل القضايا صحيحة أم خاطئة مع إعطاء نفيها:

a) $(\pi \in \mathbb{Q}) \vee (5 = 2^2)$ — خ ، خ 0,25
إذن: القضية (a) خاطئة 0,25
نفيها: $(\pi \notin \mathbb{Q}) \wedge (5 \neq 2^2)$ 0,25 — 0,75

b) $\forall x \in \mathbb{C},\ x^2+1 \neq 0$
هذه القضية خاطئة 0,25، مثال مضاد:
$\exists x = i \in \mathbb{C}:\ x^2+1 = i^2+1 = -1+1 = 0$ 0,25
نفيها: $\exists x \in \mathbb{C},\ x^2+1 = 0$ 0,25 — 0,75

c) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{R}: x > y$ — 0,75
هذه القضية صحيحة 0,25 لأنه من أجل كل عدد طبيعي x $(x \in \mathbb{N})$ يوجد عدد حقيقي y $(y \in \mathbb{R})$: $y = x-1$ يحقق: $x > x-1 = y$ 0,25
نفيها: $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{R}:\ x \leq y$ 0,25

d) $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}: x > y$ — 0,75
هل يوجد عدد طبيعي أكبر من أي عدد طبيعي؟
هذه القضية خاطئة 0,25، مثال مضاد:
$\exists y = x+1:\quad x < x+1$ 0,25
نفيها: $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}:\ x \leq y$ 0,25

3) العكس النقيض:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R},\ \overline{|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow |x - x_0| < \alpha}$

أي: $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R},\ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon \Rightarrow |x - x_0| \geq \alpha$

1

تمرين 02: نبرهن بالتراجع: $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2^n \geq n$

① الفرضية الابتدائية: من أجل: $n=0$: $2^0 = 1 \geq 0$

اذن: الفرضية الابتدائية محققة.

② نفرض ان القضية صحيحة من أجل n أي: $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2^n \geq n$

ونثبت صحتها من أجل $(n+1)$ أي اثبات: $2^{n+1} \geq n+1$??

لدينا: $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2^n \geq n \quad \text{---}(1)$

ولدينا: $2 \geq 1$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad 2^n \geq 1^n = 1 \quad \text{---}(2)$

بجمع المتراجحتين (1) و(2) طرف بطرف:

$2^n + 2^n \geq n+1$

$\Rightarrow 2 \cdot 2^n \geq n+1$

$\Rightarrow 2^{n+1} \geq n+1$

ومنه: حسب مبدأ البرهان بالتراجع: $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2^n \geq n$