

تقديم فرض رقم 01

تمرين 01:

(1) باستخدام جدول الحقيقة برهن أن:  $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \wedge \bar{Q}) \Rightarrow \bar{P})$

b)  $\forall x \in \mathbb{C}, x^2 + 1 \neq 0$

a)  $(\sqrt{2} \in \mathbb{Q}) \wedge (8 = 2^3)$

d)  $\exists x \in \mathbb{R}: \sin x = 0$

c)  $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} x + y > 0$

(2) لتكن القضايا المنطقية التالية:

هل هذه القضايا صحيحة أم خاطئة؟ (مع التعليل) أعط نفي كل قضية.

(3) لتكن  $x_0 \in \mathbb{R}$  و  $f$  دالة من  $\mathbb{R}$  نحو  $\mathbb{R}$ . أعط العكس النقيض للقضية المنطقية التالية:

$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

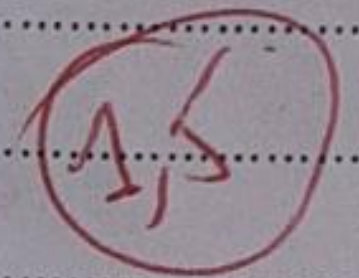
تمرين 02:

برهن بالتراجع أن:  $\forall n \in \mathbb{N} n < 2^n$

$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \wedge \bar{Q}) \Rightarrow \bar{P})$

(1) باستخدام جدول الحقيقة برهن أن:

P	Q	$\bar{P}$	$\bar{Q}$	$P \Rightarrow Q$	$P \wedge \bar{Q}$	$(P \wedge \bar{Q}) \Rightarrow \bar{P}$
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1



$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \wedge \bar{Q}) \Rightarrow \bar{P})$

وهناك من القضايا المنطقية صحيحة أم خاطئة P مع إعطاء نفي كل قضية:

a)  $(\sqrt{2} \in \mathbb{Q}) \wedge (8 = 2^3)$

b)  $\forall x \in \mathbb{C}, x^2 + 1 \neq 0$

وهناك القضية (a) خاطئة لأنها لا يمكن أن تكون صحيحة معاً لأن الوصل بين قضيتين يكون صحيحاً إذا كانت القضيتان صحيحتان معاً.

هذه القضية خاطئة مثال مضاد  $\exists x = i \in \mathbb{C}: x^2 + 1 = i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$  نفيها:  $\exists x \in \mathbb{C}, x^2 + 1 = 0$

نفيها:  $(\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}) \vee (8 \neq 2^3)$

d)  $\exists x \in \mathbb{R}: \sin x = 0$

c)  $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} x + y > 0$

وهناك القضية (c) صحيحة نفيها:  $\forall x \in \mathbb{R}: \sin x \neq 0$

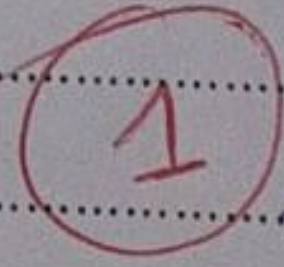
من أجل كل عدد حقيقي x يوجد عدد حقيقي y يحقق  $x + y = x - x + 1 = 1 > 0$  إذن القضية (c) صحيحة نفيها:  $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} x + y \leq 0$

(3) لتكن  $x_0 \in \mathbb{R}$  و  $f$  دالة من  $\mathbb{R}$  نحو  $\mathbb{R}$ . أعط العكس النقيض للقضية المنطقية التالية:

$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \Rightarrow |x - x_0| < \alpha$

$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon \Rightarrow |x - x_0| \geq \alpha$





1/5

تجربياً  $n < 2^n$ : تبرهن بالتراجع:  $\forall n \in \mathbb{N}$

① الفرضية الابتدائية: من أجل  $n=0$ .

الطرف الأول = 0

الطرف الثاني  $= 2^0 = 1$

اذن:  $0 < 1$

ومنه: الفرضية الابتدائية محققة.

② تفرض أن: القضية صحيحة من أجل أي  $n < 2^n$

ونثبت صحتها من أجل  $(n+1)$  أي اثبات:  $n+1 < 2^{n+1}$ ??

لدينا: (1)  $\forall n \in \mathbb{N} \quad n < 2^n$

ولدينا:  $1 < 2$

1

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad 1 = 1^n < 2^n$  ... (2)

بجمع المتراجحتين (1) و (2) طرف لطرف نجد:

$$n+1 < 2^n + 2^n$$

$$\Rightarrow n+1 < 2 \cdot 2^n$$

$$\Rightarrow n+1 < 2^{n+1}$$

ومنه: حسب مبدأ البرهان بالتراجع:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad n < 2^n$