جامعة محمد خيضر
قسم الرياضيات 2022/2021
2021/11/11

الاسم واللقب:..............................

الفوج:.....
السنة الأولى MI
المقياس: جبر 1.

07/07

تصحيح فرض رقم 01

تمرين 01:

1) باستخدام جدول الحقيقة برهن أن: $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \left(\left(P \wedge \overline{Q}\right) \Rightarrow \overline{P}\right)$

2) لتكن القضايا المنطقية التالية:

a) $(\sqrt{2} \in \mathbb{Q}) \wedge (8 = 2^3)$

b) $\forall x \in \mathbb{C},\ x^2 + 1 \neq 0$

c) $\forall x \in \mathbb{R}\quad \exists y \in \mathbb{R}\quad x + y > 0$

d) $\exists x \in \mathbb{R}:\ \sin x = 0$

هل هذه القضايا صحيحة أم خاطئة؟ (مع التعليل) أعط نفي كل قضية.

3) لتكن $x_0 \in \mathbb{R}$ و f دالة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$. أعط العكس النقيض للقضية المنطقية التالية:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R},\quad |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

تمرين 02:

برهن بالتراجع أن: $\forall n \in \mathbb{N}\quad n < 2^n$

تمرين 01:

1) باستخدام جدول الحقيقة نبرهن أن: $(P \Rightarrow Q) \overset{?}{\Leftrightarrow} ((P \wedge \overline{Q}) \Rightarrow \overline{P})$

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P \Rightarrow Q$	$P \wedge \overline{Q}$	$(P \wedge \overline{Q}) \Rightarrow \overline{P}$
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1

0,25 0,25 0,25 0,25 0,5

1,5

ومنه: $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \wedge \overline{Q}) \Rightarrow \overline{P})$

2) هل القضايا المنطقية صحيحة أم خاطئة؟ مع إعطاء نفي كل قضية:

a) $\underbrace{(\sqrt{2} \in \mathbb{Q})}_{P\ \text{خاطئة}} \wedge \underbrace{(8 = 2^3)}_{Q\ \text{صحيحة}}$ 0,75

ومنه: القضية (a) خاطئة 0,25
لأن: الوصل بين قضيتين يكون صحيحا
إذا كانت القضيتان صحيحتان معا 0,25
نفيها: $(\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}) \vee (8 \neq 2^3)$ 0,25

b) $\forall x \in \mathbb{C},\ x^2 + 1 \neq 0$ 0,75
هذه القضية خاطئة 0,25 مثال مضاد
$\exists x = i \in \mathbb{C}:\ x^2 + 1 = i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$ 0,25
نفيها: $\exists x \in \mathbb{C},\ x^2 + 1 = 0$ 0,25

d) $\exists x \in \mathbb{R}:\ \sin x = 0$ 0,75
$\exists x = 0 \in \mathbb{R}:\ \sin 0 = 0$ 0,25
ومنه: القضية (d) صحيحة 0,25
نفيها: $\forall x \in \mathbb{R}:\ \sin x \neq 0$ 0,25

c) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\quad x + y > 0$ 0,75
من أجل كل عدد حقيقي x يوجد عدد حقيقي
$y = -x + 1$ يحقق: 0,25 $x + y = x - x + 1 = 1 > 0$
إذن: القضية (c) صحيحة 0,25
نفيها: 0,25 $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\quad x + y \leq 0$

3) لتكن $x_0 \in \mathbb{R}$ و f دالة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$، إعطاء العكس النقيض للقضية المنطقية التالية:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R},\quad \underline{|x - x_0| < \alpha} \Rightarrow \underline{|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon}$

هو: $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R},\quad \overline{|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon} \Rightarrow \overline{|x - x_0| < \alpha}$ 1

أي: $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R},\quad |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon \Rightarrow |x - x_0| \geq \alpha$

Scanned by TapScanner

1,5

تمرين 02: نبرهن بالتراجع : $\forall n \in \mathbb{N} \quad n < 2^n$

① الفرضية الابتدائية : من أجل : $n=0$.

الطرف الأول : 0

الطرف الثاني : $2^0 = 1$ 0,5

اذن : $0 < 1$

ومنه : الفرضية الابتدائية محققة .

② نفرض أن : القضية صحيحة من أجل n أي $n < 2^n$

ونثبت صحتها من أجل $(n+1)$ أي اثبات : $n+1 < 2^{n+1}$??

لدينا : $\forall n \in \mathbb{N} \quad n < 2^n \ldots (1)$

ولدينا : $1 < 2$

1

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad 1 = 1^n < 2^n \ldots (2)$

بجمع المتراجحتين (1) و(2) طرف لطرف نجد :

$n+1 < 2^n + 2^n$

$\Rightarrow n+1 < 2 \cdot 2^n$

$\Rightarrow n+1 < 2^{n+1}$

ومنه : حسب مبدأ البرهان بالتراجع : $\forall n \in \mathbb{N} \quad n < 2^n$