جامعة محمد خيضر
قسم الرياضيات 2022/2021
2021/11/11

الاسم واللقب:......................

الفوج:......
السنة الأولى MI
المقياس: جبر1.

07/07

تصحيح فرض رقم 01

تمرين 01:

1) باستخدام جدول الحقيقة برهن أن: $(P\vee Q)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(\overline{P}\wedge Q)\vee(P\wedge\overline{Q})$

2) لتكن القضايا المنطقية التالية:

a) $(\sqrt{2}\in\mathbb{Q})\vee(8=2^3)$

b) $\forall x\in\mathbb{R}:\ \sin x=\cos x$

c) $\exists x\in\mathbb{R}\quad\forall y\in\mathbb{R}\quad x+y>0$

d) $\exists x\in\mathbb{N},\ x^2<7$

هل هذه القضايا صحيحة أم خاطئة؟ (مع التعليل) أعط نفي كل قضية.

3) أعط العكس النقيض للقضية المنطقية التالية:

$$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N},\forall p\in\mathbb{N}:\quad (n\geq N)\wedge(p\geq 0)\Rightarrow|u_{n+p}-u_n|<\varepsilon$$

تمرين 02:

برهن بالتراجع أن: $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad 2n+1\leq 3^n$

تمرين 01:

1) باستخدام جدول الحقيقة نبرهن أن: $(P\vee Q)\overset{??}{\Leftrightarrow}((P\wedge Q)\vee(\overline{P}\wedge Q)\vee(P\wedge\overline{Q}))$

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P\vee Q$	$P\wedge Q$	$\overline{P}\wedge Q$	$P\wedge\overline{Q}$	$(P\wedge Q)\vee(\overline{P}\wedge Q)\vee(P\wedge\overline{Q})$
1	1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	0

1,5

ومنه: $(P\vee Q)\Leftrightarrow((P\wedge Q)\vee(\overline{P}\wedge Q)\vee(P\wedge\overline{Q}))$ 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25

2) هل القضايا المنطقية صحيحة أم خاطئة؟ مع إعطاء نفي كل قضية:

a) $(\underbrace{\sqrt{2}\in\mathbb{Q}}_{P\text{ خاطئة}})\vee(\underbrace{8=2^3}_{Q\text{ صحيحة}})$ 0,75

ومنه: القضية (a) صحيحة 0,25
لأن: الفصل بين قضيتين يكون خاطئا إذا كانت القضيتان خاطئتان معا 0,25
نفيها: $(\sqrt{2}\notin\mathbb{Q})\wedge(8\neq 2^3)$ 0,25

b) $\forall x\in\mathbb{R}:\ \sin x=\cos x$ 0,75

هذه القضية خاطئة، 0,25 مثال مضاد
$\exists x=\frac{\pi}{2}\in\mathbb{R}:$
$\sin\frac{\pi}{2}=1\neq 0=\cos\frac{\pi}{2}$ 0,25
نفيها: $\exists x\in\mathbb{R}:\ \sin x\neq\cos x$ 0,25

d) $\exists x\in\mathbb{N},\ x^2<7$ 0,75

$\exists x=2\in\mathbb{N},\ 2^2=4<7$ 0,25
ومنه: القضية (d) صحيحة 0,25
نفيها: $\forall x\in\mathbb{N},\ x^2\geq 7$ 0,25

c) $\exists x\in\mathbb{R}\ \forall y\in\mathbb{R}\ x+y>0$ 0,75

نفرض أنه يوجد عدد حقيقي x حيث $x+y>0$
من أجل كل عدد حقيقي y إذن: $y>-x,\ \forall y\in\mathbb{R}$
أي: مجموعة الأعداد الحقيقية محدودة من الأدنى 0,25
وهذا غير ممكن، إذن: هذه القضية خاطئة 0,25
نفيها: $\forall x\in\mathbb{R}\ \exists y\in\mathbb{R}\ x+y\leq 0$ 0,25

3) إعطاء العكس النقيض للقضية المنطقية التالية

$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N},\forall p\in\mathbb{N}:\ \underline{(n\geq N)\wedge(p\geq 0)}\Rightarrow\underline{|u_{n+p}-u_n|<\varepsilon}$ 1

هو: $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N},\forall p\in\mathbb{N}:\ |u_{n+p}-u_n|<\varepsilon\Rightarrow(n\geq N)\wedge(p\geq 0)$

أي: $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N},\forall p\in\mathbb{N}:\ |u_{n+p}-u_n|\geq\varepsilon\Rightarrow(n<N)\vee(p<0)$

1/2

تمرين 02: نبرهن بالتراجع : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2n+1 \leqslant 3^n$

① الفرضية الابتدائية : من أجل $n=1$.

الطرف الأول $2.1+1=3$

الطرف الثاني $3^1=3$ 2/2

اذن : $3 \leqslant 3$

ومنه : الفرضية الابتدائية محققة .

② نفرض ان القضية صحيحة من أجل n أي : $2n+1 \leqslant 3^n$

ونثبت صحتها من أجل $(n+1)$ أي اثبات أن : $2(n+1)+1 \leqslant 3^{n+1}$ ؟؟

أي اثبات : $2n+3 \leqslant 3^{n+1}$ ؟؟

لدينا :
$$2n+1 \leqslant 3^n$$
1
$$\Rightarrow (2n+1).3 \leqslant 3^n.3$$
$$\Rightarrow 6n+3 \leqslant 3^{n+1} \quad \dots (1)$$

ولدينا :
$$2n \leqslant 6n$$
$$\Rightarrow 2n+3 \leqslant 6n+3 \quad \dots (2)$$

من (1) و(2) نجد : $2n+3 \leqslant 3^{n+1}$

ومنه : حسب مبدأ البرهان بالتراجع $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2n+1 \leqslant 3^n$