

تمديد فرض رقم 01

تمرين 01:

(1) باستخدام جدول الحقيقة برهن أن:  $(P \vee Q) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\bar{P} \wedge Q) \vee (P \wedge \bar{Q})$

b)  $\forall x \in \mathbb{R}: \sin x = \cos x$

a)  $(\sqrt{2} \in \mathbb{Q}) \vee (8 = 2^3)$

(2) لتكن القضايا المنطقية التالية:

d)  $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 < 7$

c)  $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} x + y > 0$

هل هذه القضايا صحيحة أم خاطئة؟ (مع التعليل) أعط نفي كل قضية.

(3) أعط العكس النقيض للقضية المنطقية التالية:

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}: (n \geq N) \wedge (p \geq 0) \Rightarrow |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon$

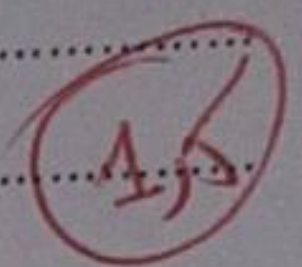
تمرين 02:

برهن بالتراجع أن:  $\forall n \in \mathbb{N}^* 2n + 1 \leq 3^n$

تمرين 04:

(1) باستخدام جدول الحقيقة برهن أن:  $(P \vee Q) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (\bar{P} \wedge Q) \vee (P \wedge \bar{Q}))$

P	Q	$\bar{P}$	$\bar{Q}$	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$\bar{P} \wedge Q$	$P \wedge \bar{Q}$	$(P \wedge Q) \vee (\bar{P} \wedge Q) \vee (P \wedge \bar{Q})$
1	1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	0



$(P \vee Q) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (\bar{P} \wedge Q) \vee (P \wedge \bar{Q}))$

هل القضايا المنطقية صحيحة أم خاطئة؟ مع إعطاء نفي كل قضية:

a)  $(\sqrt{2} \in \mathbb{Q}) \vee (8 = 2^3)$

b)  $\forall x \in \mathbb{R}: \sin x = \cos x$

صحيحة Q خاطئة P

هذه القضية خاطئة، مثال مضاد

ومنه: القضية (a) صحيحة

$\exists x = \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}:$

لأن الفصل بين قضيتين يكون خاطئا

$\sin \frac{\pi}{2} = 1 \neq 0 = \cos \frac{\pi}{2}$

كذلك كانت القضيتان خاطئتان معا

$\exists x \in \mathbb{R}: \sin x \neq \cos x$

نفيها:  $(\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}) \wedge (8 \neq 2^3)$

d)  $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 < 7$

c)  $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} x + y > 0$

$\exists x = 2 \in \mathbb{N}, 2^2 = 4 < 7$

فرضنا أنه يوجد عدد حقيقي x حيث  $x + y > 0$

ومنه: القضية (d) صحيحة

من أجل كل عدد حقيقي y، إذن:  $y > -x, \forall y \in \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{N}, x^2 > 7$

أي: مجودة الأعداد الحقيقية x و y من الأعداد

وهذا غير ممكن، إذن: هذه القضية خاطئة

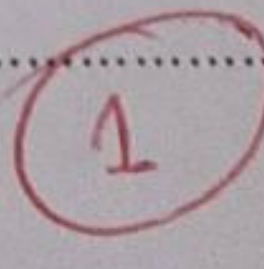
نفيها:  $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} x + y \leq 0$

(3) أعط العكس النقيض للقضية المنطقية التالية:

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}: (n \geq N) \wedge (p \geq 0) \Rightarrow |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon$

$\exists \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}: |u_{n+p} - u_n| > \varepsilon \Rightarrow (n < N) \vee (p < 0)$

$\exists \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}: |u_{n+p} - u_n| \geq \varepsilon \Rightarrow (n < N) \vee (p < 0)$





1/5

تجربياً 2: نبرهن بالتراجع :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2n+1 \leq 3^n$

① الفرضية الابتدائية : من أجل  $n=1$

$2 \cdot 1 + 1 = 3$	الطرف الأول	
$3^1 = 3$	الطرف الثاني	%

اذن :  $3 \leq 3$

ومنه : الفرضية الابتدائية محققة .

② نفرض ان القضية صحيحة من أجل  $n$  أي :  $2n+1 \leq 3^n$   
 ونثبت صحتها من أجل  $(n+1)$  أي اثبات ان :  $2(n+1)+1 \leq 3^{n+1}$  ؟؟  
 أي اثبات :  $2n+3 \leq 3^{n+1}$  ؟؟

لدينا :

$$2n+1 \leq 3^n$$

$$\Rightarrow (2n+1) \cdot 3 \leq 3^n \cdot 3$$

$$\Rightarrow 6n+3 \leq 3^{n+1} \dots (1)$$

ولدينا :

$$2n \leq 6n$$

$$\Rightarrow 2n+3 \leq 6n+3 \dots (2)$$

من (1) و (2) نجد :

$$2n+3 \leq 3^{n+1}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, 2n+1 \leq 3^n$

ومنه : حسب مبدأ البرهان بالتراجع