جامعة محمد خيضر
قسم الرياضيات 2022/2021
2022/01/02

الاسم واللقب:.....

الفوج:.....
السنة الأولى MI
المقياس: جبر 1

فرض رقم 02 تصحيح

07/07

تمرين 01: ليكن التطبيق: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto f(x) = x^2 + x + 9$

1) احسب $f(\{-2\})$, $f(\{1\})$

2) احسب $f^{-1}(\{0\}), f^{-1}(\{9\}), f^{-1}\left(\left]-\infty, \frac{35}{4}\right[\right)$

3) هل f متباين ؟ علل.

4) هل f غامر ؟ علل.

تمرين 02: لتكن A, B, C مجموعات جزئية من مجموعة E، بين أن:

$$(A\backslash B) \times C = (A \times C)\backslash(B \times C)$$

تمرين 01: (5/5) ليكن التطبيق:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto f(x) = x^2 + x + 9$

1) حساب:

* $f(\{1\}) = \{f(x) / x \in \{1\}\}$ (0,75)
$= \{f(1)\} = \{1^2 + 1 + 9\} = \{11\}$.
* $f(\{-2\}) = \{f(x) / x \in \{-2\}\}$ (0,75)
$= \{f(-2)\} = \{(-2)^2 - 2 + 9\} = \{11\}$.

2) حساب:

* $f^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \{0\}\}$.
$= \{x \in \mathbb{R} / f(x) = 0\}$. (0,75)
$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + x + 9 = 0$.
$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 1 - 36 = -35 < 0$.
$\Rightarrow f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$.
* $f^{-1}(\{9\}) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \{9\}\}$.
$= \{x \in \mathbb{R} / f(x) = 9\}$.
$f(x) = 9 \Rightarrow x^2 + x + 9 = 9$ (0,75)
$\Rightarrow x^2 + x = 0$
$\Rightarrow x(x+1) = 0$.
$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \vee \\ x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \vee \\ x = -1 \end{cases}$
$\Rightarrow f^{-1}(\{9\}) = \{0, -1\}$.
* $f^{-1}\left(\left]-\infty, \frac{35}{4}\right[\right) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \left]-\infty, \frac{35}{4}\right[\}$.
$= \{x \in \mathbb{R} / f(x) < \frac{35}{4}\}$.
$f(x) < \frac{35}{4} \Rightarrow x^2 + x + 9 < \frac{35}{4}$ (0,75)
$\Rightarrow x^2 + x + 9 - \frac{35}{4} < 0$
$\Rightarrow x^2 + x + \frac{36 - 35}{4} < 0$
$\Rightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} < 0$.
$\Rightarrow x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 < 0$
$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 < 0$.
$\Rightarrow f^{-1}\left(\left]-\infty, \frac{35}{4}\right[\right) = \emptyset$.

3) $\exists x_1 = 1 \in \mathbb{R}, \exists x_2 = -2 \in \mathbb{R}: f(1) = f(-2) = 11$ (0,75)
لكن: $1 \neq -2$
ومنه: f ليست متباين.

4) وجدنا من السؤال (2) أن:
$\exists y = 0 \in \mathbb{R}$ (0,75)
$f(x) = 0$ يحقق: $\nexists x \in \mathbb{R}$ لا يوجد
ومنه: f ليست غامر.

تمرين 02: (1,25) A, B, C مجموعات جزئية من E
نبين أن: $(A\backslash B) \times C \overset{??}{=} (A \times C)\backslash(B \times C)$
ليكن $(x, y) \in [(A \times C)\backslash(B \times C)]$ (1,75)
$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \wedge (x, y) \notin (B \times C)$
$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \wedge [(x \notin B \wedge y \notin C) \vee (x \notin B \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \notin C)]$
$\Leftrightarrow [(x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \notin B \wedge y \notin C)] \vee$ قضية خاطئة
$[(x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \notin B \wedge y \in C)] \vee$
$[(x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \in B \wedge y \notin C)]$. قضية خاطئة
$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in C \wedge x \notin B \wedge y \in C$.
$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \wedge y \in C$.
$\Leftrightarrow x \in (A\backslash B) \wedge y \in C \Leftrightarrow (x, y) \in [(A\backslash B) \times C]$
ومنه: $(A\backslash B) \times C = (A \times C)\backslash(B \times C)$