جامعة محمد خيضر | الاسم واللقب:.......................... | الفوج:.....
قسم الرياضيات 2021/2020 | | السنة الأولى MI
2021/02/14 | | المقياس: جبر 1

تصحيح فرض رقم 02

تمرين 01: ليكن التطبيق: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

1) احسب $f(\{2\})$, $f(\{\frac{1}{2}\})$
2) احسب $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(\{2\})$, $f^{-1}(]-\infty,-1[)$,
3) هل f متباين ؟ علل.
4) هل f غامر ؟ علل.

تمرين 02: لتكن A, B, C ثلاث مجموعات جزئية من مجموعة E، بين أن:

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

تمرين 01: (7)

1) الحساب:

$f(\{2\}) = \{f(x),\ x \in \{2\}\} = \{f(2)\} = \{\frac{2 \cdot 2}{1+2^2}\} = \{\frac{4}{5}\}$ 1

$f(\{\frac{1}{2}\}) = \{f(\frac{1}{2})\} = \{\frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1+(\frac{1}{2})^2}\} = \{\frac{4}{5}\}$ 1

2) حساب:

$f^{-1}(\{1\}) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \{1\}\} = \{x \in \mathbb{R} / f(x) = 1\}$ 1

$f(x) = 1 \Rightarrow \frac{2x}{1+x^2} = 1 \Rightarrow 2x = 1+x^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$

$\Rightarrow f^{-1}(\{1\}) = \{1\}$

$f^{-1}(\{2\}) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) = 2\}$

$f(x) = 2 \Rightarrow \frac{2x}{1+x^2} = 2 \Rightarrow 2(1+x^2) = 2x \Rightarrow 2x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0$ 1

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$

$\Rightarrow f^{-1}(\{2\}) = \emptyset$

$f^{-1}(]-\infty,-1[) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in]-\infty,-1[\}$

$f(x) \in]-\infty,-1[\Rightarrow f(x) < -1 \Rightarrow \frac{2x}{1+x^2} < -1$ 1

$1+x^2 > 0 \Rightarrow 2x < -(1+x^2) \Rightarrow 2x < -1 - x^2$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 < 0 \Rightarrow (x+1)^2 < 0$

$\Rightarrow f^{-1}(]-\infty,-1[) = \emptyset$

3) $\exists x_1 = 2, \exists x_2 = \frac{1}{2}$:

$f(2) = \frac{4}{5}$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{4}{5}$ 1

لكن: $2 \neq \frac{1}{2}$

ومنه: f ليس متباينا.

4) $\exists y = -2$:

$-2 = \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow (-2)(1+x^2) = 2x \Rightarrow -2x^2 - 2 = 2x \Rightarrow 2x^2 + 2x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0$ 1

$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$

إذن: لا يوجد x من $\mathbb{R}$ يحقق: $-2 = f(x)$

ومنه: f ليس غامر.

(أي هنا السؤال 2 يمكن الملاحظة أن كما $y \in]-\infty,-1[$ لا يوجد سوابق تحقق $y = f(x)$)

تمرين 02: (3)

$A \times (B \cap C) \overset{??}{=} (A \times B) \cap (A \times C)$

ليكن

$(x,y) \in [(A \times B) \cap (A \times C)]$

$\Leftrightarrow (x,y) \in (A \times B) \wedge (x,y) \in (A \times C)$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \wedge x \in A \wedge y \in C$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \wedge y \in C)$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in (B \cap C) \Leftrightarrow (x,y) \in [A \times (B \cap C)]$

جامعة محمد خيضر
قسم الرياضيات 2021/2020
2021/02/14

الاسم واللقب:..

الفوج:.....
السنة الأولى MI
المقياس: جبر 1

تصحيح فرض رقم 02

تمرين 01: ليكن التطبيق: $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = x^2 - 4x + 5$$

1) احسب $f(\{1\})$, $f(\{3\})$

2) احسب $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(]-\infty, 1[)$,

3) هل f متباين ؟ علل.

4) هل f غامر ؟ علل.

تمرين 02: لتكن A, B, C ثلاث مجموعات جزئية من مجموعة E. بين أن:

$$(A\backslash B) \times C = (A \times C)\backslash(B \times C)$$

تمرين 01: (7)

1) حساب:

* $f(\{1\}) = \{f(x),\ x \in \{1\}\}$
$= \{f(1)\} = \{1^2 - 4.1 + 5\} = 2$. 1

* $f(\{3\}) = \{f(3)\} = \{3^2 - 4.3 + 5\} = 2$. 1

2) حساب:

* $f^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R} \ /\ f(x) \in \{0\}\}$ 1
$= \{x \in \mathbb{R} \ /\ f(x) = 0\}$.

$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 5 = 0$.
$\Delta = (-4)^2 - 4.1.5 = 16 - 20 = -4 < 0$
$\Rightarrow f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$.

* $f^{-1}(\{1\}) = \{x \in \mathbb{R} \ /\ f(x) = 1\}$.
$f(x) = 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 5 = 1$ 1
$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$.
$\Delta = (-4)^2 - 4.1.4 = 16 - 16 = 0$.
$x = \frac{+4}{2} = 2$
$\Rightarrow f^{-1}(\{1\}) = \{2\}$.

* $f^{-1}(]-\infty, 1[) = \{x \in \mathbb{R} \ /\ f(x) \in]-\infty, 1[\}$
$f(x) \in]-\infty, 1[\Rightarrow f(x) < 1$ 1
$\Rightarrow x^2 - 4x + 5 < 1$
$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 < 0$
$\Rightarrow (x-2)^2 < 0$
$\Rightarrow f^{-1}(]-\infty, 1[) = \emptyset$.

3) $\exists x_1 = 1, \exists x_2 = 3$:
$f(1) = 2$
$f(3) = 2$ 1
لكن: $1 \neq 3$

ومنه: f ليس متباين.

4) $\exists y = 0$.
$f(x) = 0$
$\Rightarrow x^2 - 4x + 5 = 0$ 1
$\Delta = -4 < 0$
أي: لا يوجد للقيمة $y=0$ سابقة
ومنه: f ليس غامر.

تمرين 02: (3)

$(A\backslash B) \times C = (A \times C)\backslash(B \times C)$

ليكن

$(x,y) \in [(A \times C)\backslash(B \times C)]$
$\Leftrightarrow (x,y) \in (A \times C) \wedge (x,y) \notin (B \times C)$
$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \wedge [(x \notin B \wedge y \notin C) \vee$
$(x \notin B \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \notin C)]$
$\Leftrightarrow [(x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \notin B \wedge y \notin C)] \vee$
قضية خاطئة
$[(x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \notin B \wedge y \in C)] \vee$
$[(x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \in B \wedge y \notin C)]$
قضية خاطئة
$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in C \wedge x \notin B \wedge y \in C$
$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \wedge y \in C$
$\Leftrightarrow x \in (A\backslash B) \wedge y \in C$
$\Leftrightarrow (x,y) \in [(A\backslash B) \times C]$