Université Mohammed Kheider - Biskra
Faculté des sciences exactes et sciences de la nature et de la vie
Département de Mathématiques
Module: Analyse 03 (2ème année Licence Maths 2022/2023)
Dimanche 15 Janvier 2023

Examen Final

Exercice 1 *:*

1. *Donner une condition nécessaire et suffisante de convergence des séries numériques.*

2. *Etudier la nature des séries numériques suivantes:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+\ln n}{n\sqrt{n}} \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-(-1)^n}{3^n} \quad , \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n^2} (\sin \alpha)^2 \quad , \forall \alpha \in [0, \pi/2] \, .$$

puis calculer la somme de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-(-1)^n}{3^n}$.

Exercice 2 *:*

1. *Enoncer le théorème de dérivation pour la limite d'une suite de fonc tions.*

2. *Soit la suite de fonctions définie par:*

$$f_n(x) = n \sin \frac{x}{n} \quad , x \in [0, +\infty] \ \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*$$

   (a) *Etudier la convergence simple de la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *sur l'intervalle* $[0, +\infty[$.

   (b) *Etudier la convergence uniforme de la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *sur l'intervalle* $[0, +\infty[$ *puis sur l'intervalle* $[0, 1]$.

   (c) *Etudier la convergence simple de la suite des dérivées* $\left(f_n'\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *sur l'intervalle* $[0, +\infty[$.

   (d) *Que peut-on déduire?*

Exercice 3 *Soit la fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *paire, de période* 2*, et définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le x < 1/2 \\ -1 & \text{si } 1/2 \le x \le 1 \end{cases}$$

1. *Tracer le graph de* f.

2. *Déterminer la série de Fourier de la fonction* f.

Exercice 4 *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite numérique réelle, et* f *une fonction.*
Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses.

1. *Si la série* $\sum a_n x^n$ *converge, alors son rayon de convergence est inférieur ou égal à* $|x|$.

2. *Les rayons de convergence de* $\sum a_n x^n$ *et de* $\sum \dfrac{a_n}{n} x^n$ *sont égaux.*

3. *Si le rayon de convergence de* $\sum a_n x^n$ *est* R*, alors le rayon de conver gence de* $\sum a_n x^{2n+1}$ *est* $\sqrt{R}$.

4. *Si la série* $\sum a_n x^n$ *a un rayon de convergence nul, alors elle converge uniformément sur* $\mathbb{R}$.

5. *Si la série* $\sum a_n x^n$ *a un rayon de convergence infini, alors sa somme est une fonction continue sur* $\mathbb{R}$.

6. *Si* f *est développable en série entière sur* $]-\delta, \delta[$*, alors* f *est de classe* $\mathcal{C}^\infty\left(]-\delta, \delta[\right)$.

7. *Si* f *est une fonction impaire, et si* $\sum a_n x^n$ *est son développement en série entière, alors pour tout* $k \in \mathbb{N} : a_{2k} = 0$.

8. *Si* f *est une fonction croissante, et si* $\sum a_n x^n$ *est son développement en série entière, alors pour tout* $n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0$.

Corrigé type : Analyse 03 (2ème année Licence Maths 2022/2023)

Exercice 1 *:*

1. *La série numérique converge* *si et seulement si* *elle vérifie la condition de Cauchy :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists n(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall p \geq q \geq n(\epsilon) \Rightarrow \left| \sum_{k=0}^{p} u_k - \sum_{k=0}^{q} u_k \right| < \epsilon \qquad (0,5pt)$$

2. *Etude de la nature des séries*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+\ln n}{n\sqrt{n}} \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-(-1)^n}{3^n} \quad , \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n^2} (\sin \alpha)^2 \quad , \forall \alpha \in [0, \pi/2].$$

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+\ln n}{n\sqrt{n}}$ *converge par équivalence puisque* $0 \leq \frac{1+\ln n}{n\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n^{3/2} (\ln n)^{-1}}$

  et $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2} (\ln n)^{-1}}$ *converge d'après Bertrand.* $(1pt)$

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-(-1)^n}{3^n}$ *converge d'après D'Alembert puisque* $\frac{n-(-1)^n}{3^n} \geq 0, \quad \forall n \geq 1$

  et $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n+1-(-1)^{n+1}}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{n-(-1)^n} = \frac{1}{3} < 1.$ $(1pt)$

- $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n^2} (\sin \alpha)^2$ *diverge d'après la condition nécessaire pour tout* $\alpha \in \,]0, \pi/2]$ *puisque*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{2^n}{n^2} (\sin \alpha)^2 = +\infty \neq 0.$$

  Pour $\alpha = 0$, *la série nulle converge.* $(1pt)$

3. *La somme de la série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-(-1)^n}{3^n}$ *est la limite de la suite de la somme partielle* (S_n).

On a $u_n = \frac{n-(-1)^n}{3^n} = \frac{n}{3^n} - \frac{(-1)^n}{3^n} = \frac{n+1}{3^n} - \frac{1}{3^n} - \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$

Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{3^k} - \frac{1}{3^k} \\
&= 3\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^k} - \frac{1}{3} + \frac{n+1}{3^{n+1}}\right] - \left(\frac{1}{3} \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{3}\right)}\right) \qquad (1,5pt) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2.3^n} + \frac{1}{2.3} \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{3}\right)}
\end{aligned}$$

Donc $$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=\frac{1}{2}-\frac{n+1}{2.3^n}+\frac{1}{2.3}\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{3}\right)}-\left(\frac{-1}{3}\frac{1-\left(\frac{-1}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{3}\right)}\right)$$

et par conséquent $S=\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1.$

Exercice 2 *:*

1. ***Théorème de dérivation*** (1pt)*: Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions continument dérivable sur l'intervalle* $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ *vérifiant les conditions suivantes:*

   1) $\exists x_0\in[a,b]$*, tel que la suite numérique* $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*

   2) *La suite des dérivées* $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers une fonc tion* g *sur* $[a,b]$*.*

   Alors : la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers une fonction continument dérivable* f *sur* $[a,b]$ *et l'on a* $f'=g$*.*

2. *Etudier la convergence simple et uniforme de la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *où*

$$f_n(x)=n\sin\frac{x}{n}\quad,\forall x\in[0,+\infty[\ \text{ et }\forall n\in\mathbb{N}^*$$

   (a) *La suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}_+$*:*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}f_n(x)=\lim_{n\longrightarrow+\infty}n\sin\frac{x}{n}=x=f(x),\qquad\forall x\in\mathbb{R}_+.\qquad(1pt)$$

   (b) *La suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *ne convergence pas uniformément sur* $\mathbb{R}_+$*: On a*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\underset{x\in\mathbb{R}_+}{Sup}|f_n(x)-f(x)|=\lim_{n\longrightarrow+\infty}\underset{x\in\mathbb{R}_+}{Sup}\left|n\sin\frac{x}{n}-x\right|\neq0,$$

   puisque

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\left|n\sin\frac{x}{n}-x\right|=+\infty.\qquad(1pt)$$

- *La suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge uniformément sur* $[0,1]$ *: On pose*

$$g(x)=n\sin\frac{x}{n}-x\leq0\implies g'(x)=\cos\frac{x}{n}-1\leq0$$

  alors $(1,5pt)$

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\underset{x\in[0,1]}{Sup}|f_n(x)-f(x)|=\lim_{n\longrightarrow+\infty}\underset{x\in[0,1]}{Sup}\left|n\sin\frac{x}{n}-x\right|=\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|n\sin\frac{1}{n}-1\right|=0$$

(c) *La suite des dérivées est donnée par :*

$$f_n'(x) = \cos\frac{x}{n}, \quad \forall x \in [0,+\infty[\text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad (0,5pt)$$

elle converge simplement sur $[0,+\infty[$ *puisque*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n'(x) = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\cos\frac{x}{n} = 1 \qquad (0,5pt)$$

(d) *D'après le théorème de dérivation et puisque la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *ne convergence pas uniformément sur* $\mathbb{R}_+$*, alors on déduit que la suite des dérivées* $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ *ne convergence pas uniformément sur* $\mathbb{R}_+$.

$(0,5pt)$

Exercice 3 *: Soit la fonction* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *paire, de période 2, et définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ 0 \le x < 1/2 \\ -1 & si\ 1/2 \le x \le 1 \end{cases}$$

1. *Le graphe de* f.$(1pt)$
2. *Les coefficients de Fourier :*
   La fonction f *est paire alors* $b_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$ $(1pt)$

$$a_0 = 2\int_0^1 f(x)\,dx = 2\left[\int_0^{1/2} dx + \int_{1/2}^1 -dx\right] = 0. \qquad (1pt)$$

$$\begin{aligned} a_n &= 2\int_0^1 f(x)\cos(n\pi x)\,dx \\ &= 2\left[\int_0^{1/2}\cos(n\pi x)\,dx + \int_{1/2}^1 -\cos(n\pi x)\,dx\right] \qquad (1,5pt) \\ &= \frac{4\sin n\pi/2}{n\pi} = \begin{cases} 0 & si\ n = 2k \\ \dfrac{4(-1)^k}{(2k+1)\pi} & si\ n = 2k+1 \end{cases} \end{aligned}$$

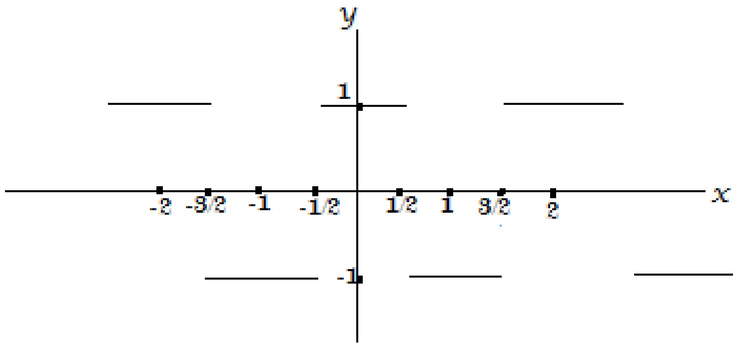
alors la série de Fourier associée à f *est*

$$4\sum_{n\ge1}\frac{\sin n\pi/2}{n\pi}\cos(n\pi x) = 4\sum_{k\ge0}\frac{(-1)^k}{(2k+1)\pi}\cos((2k+1)\pi x) \qquad (0,5pt)$$

Exercice 4 *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite numérique réelle, et* f *une fonction.*

1. F   *2. V*   *3. V*   *4. F* $(4pts)$

5. V   *6. V*   *7. V*   *8. F*



1. Le graphe de f.(1pt)