Biskra, le 18 Jan 2023

Département des Mathématiques
2ème Année
Contrôle : Analyse numérique 1 (1h30 minutes)

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. **Faites des phrases claires et précises**.

Exercice 1 (4pts)

1. Construire le polynôme de LAGRANGE P qui interpole les trois points $(-1, \alpha)$, $(0, \beta)$ et $(1, \alpha)$ où α et β sont des réels.
2. Si $\alpha = \beta$, donner le degré de P.
3. Montrer que P est pair. Peut-on avoir P de degré 1 ?

Exercice 2 (5pts)

On veut évaluer la quantité $S = \sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3 + ...}}}$

1. Mettre cette équation au cube et obtenir une équation de la forme $f(s) = 0$.
2. Démontrer que cette fonction possède une racine dans l'intervalle $[1, 3]$.
3. Résoudre cette dernière à l'aide de la méthode de la bisection dans l'intervalle $[1, 3]$.

Exercice 3 (11pts)

On considère l'intégrale : $\int_1^2 \ln(x)\, dx$

1. Calculer les valeurs approchées à l'aide de la formule du Trapèzes composées avec $m = 4$ et comparer le résultat ainsi obtenu avec la valeur exacte. Pourquoi la valeur numérique est-elle inférieure à la valeur exacte ? Est-ce vrai quel que soit m ? (Justifier la réponse.)
2. Quel nombre de sous-intervalles m faut-il choisir pour avoir une erreur Em inférieure à 10^{-2} ? On rappelle que, pour une fonction f de classe C^2, l'erreur de quadrature E_m associée à la méthode des trapèzes composite avec une discrétisation uniforme de pas $h = \frac{b-a}{m}$ de l'intervalle $[a, b]$ en m sous-intervalles vérifie $|E_m| = \left| \frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\xi) \right|, \xi \in]a; b[$

Bonne chance

Exercice 1

1. $P(x) = \alpha\frac{x(x-1)}{2} + \beta\frac{(x+1)(x-1)}{-1} + \alpha\frac{(x+1)x}{2} = (\alpha-\beta)x^2 + \beta$
2. Si $\alpha = \beta$, $P(x) = \beta$ qui est un polynôme de degré 0.

$P(-x) = P(x)$ donc P est pair. Donc P ne peut pas être de degré 1 car un polynôme de degré 1 est de la forme $a_0 + a_1 x$ qui ne peut pas être pair.

Exercice 2

1. $S = \sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3+......}}} \Leftrightarrow S^3 = 3+\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3+......}} \Leftrightarrow S^3 = 3+S \Leftrightarrow S^3-3-S = 0$,posons $f(s) = S^3-3-S$. dès lors le problème se transforme en une un problème de résolution de l'équation $f(s) = 0$ sur $[1,3]$.
2. Puisque $f(1) * f(3) \prec 0$, alors il existe au moins une solution dans $[1,3]$
3. Une solution approchée sera $c = \frac{1+3}{2} = 1.5$

Exercice 3

1. La méthode des trapèzes composite à $m+1$ points (m sous-intervalles) pour calculer l'intégrale d'une fonction f sur l'intervalle $[a,b]$ s'écrit
   $\int_1^2 f(t)\,dt = h\left[\frac{1}{2}f(a) + \sum\limits_{i=1}^{m-1} f(a+ih) + \frac{1}{2}f(b)\right]$ avec $h = \frac{b-a}{m}$
   Ici on a $f(x) = \ln(x), a = 1, b = 2, m = 4$ d'où $h = \frac{1}{4}$, et on obtient
   $I \simeq \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}f(1) + f\left(\frac{5}{4}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{7}{4}\right) + f(2)\right] = \frac{1}{4}\left[\ln\left(\frac{5}{4}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{7}{4}\right) + \frac{1}{2}\ln(2)\right] = 0.3836995094$.
   Une primitive de $\ln(x)$ est $F(x) = x\left[\ln(x)-1\right]_{x=1}^{x=2}$. La valeur exacte est alors $I = 2\ln(2) - 1 \approx 0.386294361$. La valeur numérique obtenue est inférieure à celle exacte quelque soit le pas h choisi car la fonction f est concave, ce qui signifie qu'une corde définie par deux points de la courbe $y = \ln(x)$ sera toujours en-dessous de la courbe, donc l'aire sous les trapèzes sera inférieure à l'aire exacte.
2. L'erreur est majorée par $|E_m| \leq \left|\frac{(b-a)}{12}h^2 \sup_{\xi\in]a;b[} f''(\xi)\right| = \frac{(b-a)^3}{12m^2}\sup_{\xi\in]a;b[} f''(\xi)$
   On a $f(x) = ln(x)$, $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, ainsi $|E_m| \leq \left|\frac{1}{12m^2}\max\frac{1}{\xi^2}\right| = \frac{1}{12m^2}$
   Pour que $|E_m| \leq 10^{-2}$ il suffit que $\frac{1}{12m^2} \leq 10^{-2}$, $m \succ \frac{10}{\sqrt{12}} \approx 2.886$. À partir de 3 sous-intervalles, l'erreur de quadrature est inférieure à 10^{-2}.