Université Mohammed Kheider - Biskra
Faculté des sciences exactes et sciences de la nature et de la vie
Département de Mathématiques
Module: Analyse 03 (2ème année Licence Maths 2021/2022)
Lundi 7 Février 2022

EXAMEN FINAL

Exercice 1 *: Etudier la nature des séries numériques suivantes:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\cos^2 n}{n}\right)^n \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{1+n^2} \quad , \quad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Exercice 2 *Considérons les intégrales suivantes:*

$$\int_1^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t-1}} \quad , \quad \int_0^{+\infty} te^{-t}dt.$$

1. *Déterminer les points incertains pour chacune des intégrales.*
2. *Dire si les intégrales convergent.*
3. *Calculer leurs valeurs dans le cas de convergence.*

Exercice 3 *On considère les deux suites de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définies de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *par :*

$$f_n(x) = \left(\frac{x}{1+x^2}\right)^n, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$g_n(x) = \frac{x}{(x^2+n)(x^2+n+1)}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

1. *Montrer que les séries* $\left(\sum f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $\left(\sum g_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *convergent uniformément sur* $\mathbb{R}$.
2. *Déterminer leurs sommes.*
3. *Est-ce que leur convergence est normale.*