Ex01 :Montrer que l'ensemble $A := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 : xy \leq 1\right\}$ est non convexe

Solution : Pour montrer qu'un ensemble est non convexe, il faut vérifier

$$\exists (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in A : \exists t \in (0,1) : t(x_1,y_1)+(1-t)(x_2,y_2) \notin A$$

C-à-d

$$\exists (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in A : \exists t \in (0,1) : (tx_1+(1-t)x_2)(ty_1+(1-t)y_2) > 1$$

et on voit que $(\frac{1}{2},2),(2,\frac{1}{2})$ avec $t=\frac{1}{2}$ répond à la question

$$(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 2)(\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}) = \left(\frac{5}{4}\right)^2 > 1.$$

Donc A est non convexe.

Ex02 : Montrer que l'ensemble $B = \left\{(x,y;z) \in \mathbb{R}^3; 3(x-1)^2 + \frac{y^2}{\sqrt{2}} \leq z+1\right\}$

Solution : Soit $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2) \in B$, soit $t \in (0,1)$ on a

$$\begin{aligned} 3(x_1-1)^2 + \frac{y_1^2}{\sqrt{2}} &\leq z_1+1, \\ 3(x_2-1)^2 + \frac{y_2^2}{\sqrt{2}} &\leq z_2+1. \end{aligned}$$

On va vérifier maintenant que $(tx_1+(1-t)x_2, ty_1+(1-t)y_2, tz_1+(1-t)z_2) \in B$,

On a

$$\begin{aligned} & 3(tx_1+(1-t)x_2-1)^2 + \frac{(ty_1+(1-t)y_2)^2}{\sqrt{2}} \\ = \; & 3\left(t^2x_1^2+(1-t)^2x_2^2+2t(1-t)x_1x_2+1-2tx_1-2(1-t)x_2\right) \\ & + \frac{\left(t^2y_1^2+(1-t)^2y_2^2+2t(1-t)y_1y_2\right)}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned} & t^2\left(3x_1^2+\frac{y_1^2}{\sqrt{2}}\right)+(1-t)^2\left(3x_2^2+\frac{y_2^2}{\sqrt{2}}\right)+2t(1-t)\left(3x_1x_2+\frac{y_1y_2}{\sqrt{2}}\right) \\ & +3-6tx_1-6(1-t)x_2 \\ = \; & t^2\left(3(x_1-1)^2+\frac{y_1^2}{\sqrt{2}}\right)+(1-t)^2\left(3(x_2-1)^2+\frac{y_2^2}{\sqrt{2}}\right)+2t(1-t)\left(3x_1x_2+\frac{y_1y_2}{\sqrt{2}}\right) \\ & +t^2(6x_1-3)+(1-t)^2(6x_2-3)+3-6tx_1-6(1-t)x_2 \\ \leq \; & t^2(z_1+1)+(1-t)^2(z_2+1)+2t(1-t)\left(3x_1x_2+\frac{y_1y_2}{\sqrt{2}}\right) \\ & +6(x_1+x_2)\left(t^2-t\right)-6t^2+6t \qquad (1) \end{aligned}$$

On peut voir que

$$\begin{aligned}
& 2t\,(1-t)\left(3x_1x_2+\frac{y_1y_2}{\sqrt{2}}\right)+6\left(t^2-t\right)(x_1+x_2)-6\left(t^2-t\right) \\
= \; & 2t\,(1-t)\left(3x_1x_2+\frac{y_1y_2}{\sqrt{2}}-3\,(x_1+x_2)\right)-6\left(t^2-t\right) \\
= \; & 2t\,(1-t)\left(\sqrt{3}\,(x_1-1)\sqrt{3}\,(x_2-1)+\frac{y_1y_2}{\sqrt{2}}-3\right)-6\left(t^2-t\right) \\
= \; & 2t\,(1-t)\left(\sqrt{3}\,(x_1-1)\sqrt{3}\,(x_2-1)+\frac{y_1y_2}{\sqrt{2}}\right).
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Shwarz on obtient

$$\begin{aligned}
(1) \; = \; & t^2\,(z_1+1)+(1-t)^2\,(z_2+1)+2t\,(1-t)\left(\sqrt{3}\,(x_1-1)\sqrt{3}\,(x_2-1)+\frac{y_1y_2}{\sqrt{2}}\right) \\
\leq \; & t^2\,(z_1+1)+(1-t)^2\,(z_2+1)+2t\,(1-t)\left(\sqrt{3\,(x_1-1)^2+\frac{y_1^2}{\sqrt{2}}}\sqrt{3\,(x_2-1)^2+\frac{y_2^2}{\sqrt{2}}}\right) \\
\leq \; & t^2\,(z_1+1)+(1-t)^2\,(z_2+1)+2t\,(1-t)\sqrt{z_1+1}\sqrt{z_2+1} \\
\leq \; & tz_1+(1-t)\,z_2+1
\end{aligned}$$

Le dernier passage est une conséquence de

$$\left(t^2-t\right)\left[(z_1+1)+(z_2+1)-2\sqrt{z_1+1}\sqrt{z_2+1}\right]\leq 0.$$

Donc B convexe

Ex03 : Montrer que

$$conv(A+B)=conv(A)+conv(B).$$

Solution : On a $A\subseteq conv(A), B\subseteq conv(B)$, alors $A+B\subseteq conv(A)+conv(B)$. Comme $conv(A)+conv(B)$ convexe contient $A+B$ et $conv(A+B)$ est le plus petit convexe contenant $A+B$. On deduit que $conv(A+B)\subseteq conv(A)+conv(B)$. Soit maintenant $x\in conv(A)$, $y\in conv(B)$, alors $x=\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_ia_i, \alpha_i\geq 0, \sum\alpha_i=1$; avec $a_i\in A$ et $x=\sum\limits_{j=1}^{l}\beta_jb_j, \beta_j\geq 0, \sum\limits_{j=1}^{m}\beta_j=1$ pour certains nombres entiers $k; l\geq 1$.

Il est claire que $x+y=\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{l}\alpha_i\beta_j\,(a_i+b_j)\in conv(A+B)$. Donc $conv(A)+conv(B)\subseteq conv(A+B)$