Université Mohamed Khider Biskra

Nom :

Prénom :

Groupe :

2 ^{eme} Année Maths

Module : Ana Num I

Ann Univ : 2023/2024

INTERROGATION N° 02

Exercice 1 : On considère la fonction $F(x) = 2x^2 - 3x - e^{-x}$.

1) Montrer que $F(x) = 0$ admet une solution unique α_1 sur $I_1 = [1,2]$.

2) a- Peut-on appliquer la méthode de Newton pour calculer α_1 ? Justifier.
   b- Soit $x_o = 2$. Calculer les trois premières itérations en utilisant cette méthode.

3) Maintenant, on pose $H(x) = \frac{d^2F(x)}{dx^2}$ sur $I_2 = [-2,-1]$
   a- Montrer que l'équation $H(x) = 0$ admet un zéro unique α_2 sur $I_2 = [-2,-1]$.
   b- Soit $\varepsilon = 5^{-4}$. Déterminer le nombre d'itérations nécessaires pour approcher par la méthode de la Bissection.

1°/ $F(x)=0$ admet une racine unique α_1 sur I_1

- F est une fonction définie et continue sur I_1
- $\begin{cases} F(1) = 2-3-e^{-1} = -(3-2+e^{-1}) = -(1+e^{-1}) < 0 \\ F(2) = 8-6-e^{-2} = 2-e^{-2} > 0 \end{cases}$

D'après le Th. V. I, $\exists$ aumoins une racine $\alpha_1 / F(\alpha_1)=0$.

- $\begin{cases} \text{L'unicité de la solution} \\ F'(x) = 4x-3+e^{-x} > 0, \ \forall x \in [1,2] \\ \text{alors } F \text{ est strictement croissante sur } I_1 \end{cases}$

Conclusion : $F(x)=0$ admet une racine unique α_1 sur I_1

2°/ a- Peut-On appliquer La méthode de Newton?

Il suffit de vérifier les Conditions d'application du théorème de Newton:

- -1 F est de classe C^2 sur $[1,2]$ Car $\begin{cases} e^{-x} \text{ est } C^2(I_1) \\ x(2x-3) \text{ est } C^2(I_1) \end{cases}$
- -2- $F(1) \times F(2) < 0$ (voir Q1)
- -3- $F'(x) = 4x + e^{-x} - 3 > 0, \ \forall x \in I_1$
- -4- $F''(x) = 4 - e^{-x} > 0, \ \forall x \in I_1$ (garde un signe Cst)
- -5- Pour $x_0 = 2$, on a $F(2)\,F''(2) > 0$.

Alors La méthode de Newton définie par $\begin{cases} x_0 = 2; \\ x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \end{cases}$

Converge vers La racine α_1 de $F(x)=0$.

2-b/ L'algorithme de Newton est donné par

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}, \quad k=0,1,2,\dots \end{cases}$$

Dans notre cas, il s'écrit :

$$\begin{cases} x_0 = 2; \\ x_{n+1} = x_n - \frac{2x_n^2 - 3x_n - e^{-x_n}}{4x_n + e^{-x_n} - 3}, \quad k=0,1,2,3,\dots \end{cases}$$

• Pour $n=0$,

$$x_1 = x_0 - \frac{2x_0^2 - 3x_0 - e^{-x_0}}{4x_0 + e^{-x_0} - 3} = 1,6369.$$

• Pour $n=1$;

$$x_2 = x_1 - \frac{2x_1^2 - 3x_1 - e^{-x_1}}{4x_1 + e^{-x_1} - 3} = 1,5691.$$

• Pour $n=2$;

$$x_3 = x_2 - \frac{2x_2^2 - 3x_2 - e^{-x_2}}{4x_0 + e^{-x_2} - 3} = 1,5666$$

$$H(x) = F''(x) = 4 - e^{-x}$$

-a) Montrons que $H(x)=0$ admet un zéro unique sur I_3

* $H(x)$ est bien définie et continue sur I_3.

$$\begin{cases} H(-2) = 4 - e^{2} < 0 \\ H(-1) = 4 - e > 0 \end{cases} \Rightarrow H(-1)H(-2) < 0.$$

D'après le TVI, $\exists$ au moins une racine $\alpha_3 / H(\alpha_3) =$

- L'unicité de la solution :

$H'(x) = e^{-x} > 0, \ \forall x \in I_3 \Rightarrow H$ est strictement croissante.

Finalement, on déduit que cette racine est unique

-b) Le nombre d'itérations

$$n > \frac{\ln\left[\frac{|b-a|}{\varepsilon}\right]}{\ln 2} - 1 = \frac{\ln 625}{\ln 2} - 1 = 8,288$$

$$\Rightarrow n = 9$$

Exercice 2 : Considérons l'intégrale $I = \int_{-1}^{1} e^{x^2} dx$

a) Calculer une approximation de I en appliquant la méthode du trapèze composée avec 3 intervalles.

b) Pour cette méthode, quel est le nombre minimal d'intervalles à utiliser pour obtenir une approximation qui a une erreur d'au plus 10^{-2} ?

(a) On pose $h = \frac{2}{3}$, $x_0 = -1$, $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, et $x_3 = 1$ et on obtient

$$\int_{-1}^{1} e^{x^2} dz \simeq \frac{h}{2}(e + 2e^{\frac{1}{9}} + 2e^{\frac{1}{9}} + e) = 3,302\,213\,310.$$

(b) Pour $h = \frac{2}{n}$, l'erreur absolue est $|E| = \frac{2}{12}|f''(\eta)|h^2 = \frac{4}{6n^2}|e^{\eta^2}(2+4\eta^2) \leq \frac{4e}{n^2}$. Cette erreur est inférieure à 10^{-2} dès que $n \geq 33$.