Université Mohamed Khider - Biskra
Faculté: SESNV Dpt de Mathématiques $3^{\text{ème}}$A. Maths
A.U: 2020/2021 29/03/2021 14.00-15.00
Examen : Espaces Vectoriels Normés
Exercice I. (1+1+1+1+1+1+1+1+1) = 09 pts

Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel normé réel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt$.
Soit l'application Ψ définie par

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & (E, \|\cdot\|_1) & \longrightarrow & (E, \|\cdot\|_1) \\ & f & \longmapsto & \Psi(f) \end{array}$$

où

$$\begin{array}{rccc} \Psi(f) : & [0,1] & \longrightarrow & (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ & x & \longmapsto & (\Psi(f))(x) = \int\limits_0^x f(t)dt \end{array}$$

1) Donner la définition d'une application linéaire continue.
2) Donner la définition de la norme d'une application linéaire continue.
3) Montrer que l'application Ψ est linéaire.
4) Montrer que l'application Ψ est continue de $(E, \|\cdot\|_1)$ dans $(E, \|\cdot\|_1)$.
5) En déduire que $\|\Psi\|_{\mathcal{L}_c(E)} = \sup\limits_{\|f\|_1 \leq 1} (\|\Psi(f)\|_1) \leq 1$.

Soit la fonction $h_n \in E$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{array}{rccc} h_n : & [0,1] & \longrightarrow & (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ & x & \longmapsto & h_n(x) = ne^{-nx} \end{array}$$

6) Calculer $\|h_n\|_1$ et montrer que $\|h_n\|_1 \leq 1$.
7) Calculer $\|\Psi(h_n)\|_1$.
8) Montrer que $\|\Psi\|_{\mathcal{L}_c(E)} \geq 1$.
9) En déduire la valeur de $\|\Psi\|_{\mathcal{L}_c(E)}$.

Exercice II. (1.5+1.5+2+1+2+1) = 09 pts

Soit $E = C\left([0,1], \mathbb{R}\right)$ l'espace vectoriel normé réel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire $\left(f \ / \ g\right) = \int_0^1 f(x)\ g(x)\, dx$

et de la norme $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 f^2(x)\, dx\right)^{1/2}$.

1) Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le cas d'égalité.

2) Calculer $\left|\left(\sqrt{e^f} \ / \ \sqrt{e^{-f}}\right)\right|$, $\left\|\sqrt{e^f}\right\|_2$ et $\left\|\sqrt{e^{-f}}\right\|_2$.

3) Trouver $\beta \geq 0$ tel que

$$\int_0^1 e^{f(x)} dx \int_0^1 e^{-f(x)} dx \geq \beta, \quad \forall f \in E.$$

4) Montrer que si $\sqrt{e^f} = \alpha\sqrt{e^{-f}}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ alors f est constante.

5) Trouver $f \in E$ tel que

$$\int_0^1 e^{f(x)} dx \int_0^1 e^{-f(x)} dx = \beta.$$

6) En déduire la valeur de

$$\inf_{f \in E}\left(\int_0^1 e^{f(x)} dx \int_0^1 e^{-f(x)} dx\right).$$

Remarque: 02 points sont réservés pour la bonne tenue de votre copie.

Université Mohamed Khider - Biskra
Faculté: SESNV Dpt de Mathématiques $3^{\text{ème}}$A. Maths
A.U: 2020/2021 29/03/2021 14.00-15.00
Corrigé type de l'examen : Espaces Vectoriels Normés
Corrigé: Exercice I. (1+1+1+1+1+1+1+1+1) = 09 pts

Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel normé réel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt$
Soit l'application Ψ définie par

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & (E, \|\cdot\|_1) & \longrightarrow & (E, \|\cdot\|_1) \\ & f & \longmapsto & \Psi(f) \end{array}$$

où

$$\begin{array}{rccc} \Psi(f): & [0,1] & \longrightarrow & (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ & x & \longmapsto & (\Psi(f))(x) = \int\limits_0^x f(t)dt \end{array}$$

1) Voir cours.
2) Voir cours.
3) Montrons que l'application Ψ est linéaire. On a

$$\begin{aligned} \forall f,\ g \in E,\ \forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ \forall x \in [0,1],\quad \Psi(\alpha f + \beta g)(x) &= \int\limits_0^x (\alpha f + \beta g)(t)dt = \alpha \int\limits_0^x f(t)dt + \beta \int\limits_0^x g(t)dt \\ &= \alpha \Psi(f)(x) + \beta \Psi(g)(x) \end{aligned}$$

d'où

$$\forall f,\ g \in E,\ \forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}, \Psi(\alpha f + \beta g) = \alpha \Psi(f) + \beta \Psi(g)$$

et donc Ψ est linéaire.
4) Montrons que l'application Ψ est continue. On a

$$\forall f \in E, \forall x \in [0,1],\quad |(\Psi(f))(x)| = \left| \int\limits_0^x f(t)dt \right| \leq \int\limits_0^x |f(t)|\, dt \leq \int\limits_0^1 |f(t)|\, dt = \|f\|_1$$

puis par intégration,

$$\forall f \in E,\ \|\Psi(f)\|_1 = \int\limits_0^1 |(\Psi(f))(x)|\, dx \leq \int\limits_0^1 \|f\|_1\, dx = \|f\|_1$$

d'où Ψ est continue de $(E, \|\cdot\|_1)$ dans $(E, \|\cdot\|_1)$.
5) On en déduit de (4) que

$$\|\Psi\|_{\mathcal{L}_c(E)} \sup_{\|f\|_1 \leq 1} (\|\Psi(f)\|_1) \leq 1.$$

Soit la fonction $h_n \in E$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{array}{rccc} h_n: & [0,1] & \longrightarrow & (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ & x & \longmapsto & h_n(x) = ne^{-nx} \end{array}$$

6) Calculons $\|h_n\|_1$ et montrons que $\|h_n\|_1 \leq 1$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; \|h_n\|_1 = \int_0^1 ne^{-nt}dt = 1 - e^{-n} \leq 1.$$

7) Calculons $\|\Psi(h_n)\|_1$. On a

$$\|\Psi(h_n)\|_1 = \int_0^1 |(\Psi(h_n))(x)|\, dx = \int_0^1 \left(\int_0^x |h_n(t)|\, dt \right) dx = \int_0^1 (1-e^{-nx})dx = 1 - \frac{1-e^{-n}}{n}.$$

8) Montrons que $\|\Psi\|_{\mathcal{L}_c(E)} \geq 1$.
Comme $\|\Psi(h_n)\|_1 \leq \|\Psi\|_{\mathcal{L}_c(E)}$, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \|\Psi(h_n)\|_1 = 1 \leq \|\Psi\|_{\mathcal{L}_c(E)} .$$

9) On en déduit par double inégalité de (5) et (8) que

$$\|\Psi\|_{\mathcal{L}_c(E)} = 1.$$

Corrigé: Exercice II. (1.5+1.5+2+1+2+1) = 09 pts

1) Rappel de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le cas d'égalité.
Soit H un espace préhilbertien réel ou complexe. Alors, on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\forall (x, y) \in H \times H, \;\; |(x \;/\; y)| \leq \|x\| \, \|y\|$$

et le cas d'égalité si $\exists \alpha \in \mathbb{R}$, $x = \alpha y$.

2) Calcul de $\left|\left(\sqrt{e^f} \;/\; \sqrt{e^{-f}}\right)\right|$, $\left\|\sqrt{e^f}\right\|_2$ et $\left\|\sqrt{e^{-f}}\right\|_2$.

$$\begin{aligned} \left|\left(\sqrt{e^f} \;/\; \sqrt{e^{-f}}\right)\right| &= \int_0^1 \sqrt{e^{f(x)}}\sqrt{e^{-f(x)}}dx = \int_0^1 dx = 1 \\ \left\|\sqrt{e^f}\right\|_2 &= \left(\int_0^1 e^{f(x)}dx\right)^{1/2} \\ \left\|\sqrt{e^{-f}}\right\|_2 &= \left(\int_0^1 e^{-f(x)}dx\right)^{1/2} \end{aligned}$$

3) On a, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\forall f \quad \in \quad E, \quad 1 = \int_0^1 dx = \int_0^1 \sqrt{e^{f(x)}}\sqrt{e^{-f(x)}}dx = \left|\left(\sqrt{e^f} \ / \ \sqrt{e^{-f}}\right)\right| \leq \left\|\sqrt{e^f}\right\|_2 \left\|\sqrt{e^{-f}}\right\|_2$$

$$= \left(\int_0^1 \left(\sqrt{e^{f(x)}}\right)^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_0^1 \left(\sqrt{e^{-f(x)}}\right)^2 dx\right)^{1/2} = \left(\int_0^1 e^{f(x)}dx\right)^{1/2} \left(\int_0^1 e^{-f(x)}dx\right)^{1/2}$$

d'où

$$\int_0^1 e^{f(x)}dx \int_0^1 e^{-f(x)}dx \geq 1, \quad \forall f \in E$$

et donc $\beta = 1$.

4) On a

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \sqrt{e^f} = \alpha\sqrt{e^{-f}} \Longrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ e^{2f} = \alpha^2 \Longrightarrow f \ \text{ est constante.}$$

5) D'après le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et d'après (4), il suffit donc de prendre toute fonction $f \in E$ constante.

6) D'après (2) et (3), on en déduit que

$$\inf_{f \in E} \left(\int_0^1 e^{f(x)}dx \int_0^1 e^{-f(x)}dx\right) = 1.$$