Université Mohamed Khider - Biskra

Faculté: SESNV   Dpt de Mathématiques $3^{\text{ème}}$A. Maths
A.U: 2021/2022   15/02/2022   11.00-12.00

Examen : Espaces Vectoriels Normés

Exercice I. (1+2+1+1+1+1+2+1) = 10 pts

Soit $E = C([-1,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des fonctions continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} (|f(x)|)$$

Soit Ψ l'application définie sur E par

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \Psi(f) = f(1) - f(-1) \end{array}$$

1- Montrer que Ψ est une forme linéaire sur E.
2- Trouver $\beta \geq 0$ tel que $|\Psi(f)| \leq \beta \|f\|_\infty$, $\forall f \in E$.
3- En déduire que Ψ est continue sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
Soit la fonction g définie par

$$\begin{array}{rccc} g: & [-1,1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & g(x) = x \end{array}$$

4- Est-ce que $g \in E$?
5- Calculer $\|g\|_\infty$.
6- Calculer $|\Psi(g)|$.
7- Montrer que

$$\|\Psi\| = \sup_{\|f\|_\infty = 1} (|\Psi(f)|) \geq |\Psi(g)|.$$

8- En déduire la valeur de $\|\Psi\|$.

Exercice II. $(1+2+1+2+2) = 08$ pts

Soit $H = l^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$ l'espace de Hilbert des suites réelles $(x_n)_{n\geq 0}$ de carré sommable, muni du produit scalaire $\left((x_n)_{n\geq 0} \ / \ (y_n)_{n\geq 0}\right) = \sum\limits_{n\geq 0} x_n y_n$.
Soit E le sous-espace vectoriel de $l^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$ des suites réelles $(x_n)_{n\geq 0}$ nulles à partir d'un certain rang,

$$E = \left\{(x_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \exists M \in \mathbb{N},\ x_n = 0,\ \forall n \geq M\right\}.$$

Soit f la forme linéaire définie par

$$\begin{array}{llll} f: & E & \to & \mathbb{R} \\ & x = (x_n)_{n\geq 0} & \longmapsto & f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{n+1} \end{array}$$

Rappel: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 = \frac{\pi^2}{6}$.
1- Donner l'énoncé du théorème de représentation de Riesz-Fréchet.
2- Trouver $y \in l^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$ tel que $\forall x \in E,\ f(x) = (x \ / \ y)$.
3- En déduire que f est continue.
4- Est-ce qu'il existe un élément $z \in E$ tel que $\forall x \in E,\ f(x) = (x \ / \ z)$?
5- Que peut-on déduire sur E?

REMAQUE: la bonne tenue de votre copie vaut 02 points.

Université Mohamed Khider − Biskra
Faculté: SESNV Dpt de Mathématiques $3^{\text{ème}}$A. Maths
A.U: 2021/2022 15/02/2022 11.00-12.00

Corrigé Type de l' Examen: Espaces Vectoriels Normés
Corrigé: Exercice I. (1+2+1+1+1+1+2+1) = 10 pts

1- Ψ forme linéaire sur E.
On a,

$$\begin{aligned}\forall\alpha,\beta &\in \mathbb{R},\forall f,g\in E,\Psi(\alpha f+\beta g)=(\alpha f+\beta g)(1)-(\alpha f+\beta g)(-1)\\ &= \alpha(f(1)-f(-1))+\beta(g(1)-g(-1))=\alpha\Psi(f)+\beta\Psi(g).\end{aligned}$$

D'où Ψ est linéaire de E sur $\mathbb{R}$. Donc, c'est une forme linéaire sur E.
2- On a,

$$|\Psi(f)|=|f(1)-f(-1)|\leq|f(1)|+|f(-1)|\leq 2\sup_{x\in[-1,1]}(|f(x)|)=2\|f\|_\infty \quad ,\forall f\in E,$$

d'où $\beta=2$.
3- De (2) on déduit que Ψ est continue sur $(E,\|\cdot\|_\infty)$.
4- Comme g est une fonction polynôme définie de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$, alors g est continue et donc $g\in E$.
5- On a,

$$\|g\|_\infty=\sup_{x\in[-1,1]}(|g(x)|)=\sup_{x\in[-1,1]}(|x|)=1.$$

6- On a,

$$|\Psi(g)|=|g(1)-g(-1)|=|1-(-1)|=2$$

7- Comme

$$|\Psi(g)|\in\{|\Psi(f)|,\ \|f\|_\infty=1\}$$

alors

$$\|\Psi\|=\sup_{\|f\|_\infty=1}(|\Psi(f)|)=\sup\{|\Psi(f)|,\ \|f\|_\infty=1\}\geq|\Psi(g)|$$

8- De (2) et (7), on déduit que

$$2=|\Psi(g)|\leq\|\Psi\|=\sup_{\|f\|_\infty=1}(|\Psi(f)|)\leq 2.$$

et donc

$$\|\Psi\|=2.$$

Corrigé: Exercice II. (1+2+1+2+2) = 08 pts

1- Voir cours

2- On a,

$$\forall x \in E,\ f(x) = (x\ /\ y) \Longleftrightarrow \forall x \in E,\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{n+1} = \sum_{n\geq 0} x_n y_n$$

d'où

$$y_n = \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

et donc

$$y = \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\geq 0} \in l^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$$

car

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 = \frac{\pi^2}{6} < +\infty.$$

3- Comme le produit scalaire est continue, on déduit de (2) que f est continue.

4- Supposons qu'il existe un élément $z \in E$ tel que $\forall x \in E,\ f(x) = (x\ /\ z)$, alors

$$\forall x \in E,\ f(x) = (x\ /\ z) \Longleftrightarrow \forall x \in E, (x\ /\ y) = (x\ /\ z) \Longleftrightarrow \forall x \in E, (x\ /\ y - z) = 0 \Longleftrightarrow y = z$$

d'où contradiction, car $y \notin E$.

5- On peut en déduire que E n'est pas un espace de Hilbert.