Université Mohamed Khider - Biskra

Faculté: SESNV Dpt de Mathématiques $3^{\text{ème}}$A. Maths
A.U: 2022/2023 16/01/2023 10.00-11.30 Amphi I
Examen : Espaces Vectoriels Normés

Exercice I. (1+2+1+1+1+1+1) = 08 pts

Soit $H = l^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$ l'espace de Hilbert des suites réelles de carré sommable, muni du produit scalaire

$$\forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\,,\ y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H, \quad (x\ /\ y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$$

et de la norme

$$\forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2\right)^{1/2}.$$

Soit T la forme linéaire définie sur H par

$$\begin{array}{rccc} T: & H & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & T(x) = x_{2023} \end{array}$$

1) Donner l'énoncé du théorème de représentation de Riesz-Fréchet.
2) Montrer qu'il existe un réel $c > 0$ tel que

$$\forall x \in H, \quad |T(x)| \leq c\,\|x\|_2\,.$$

3) En déduire que T est continue.
4) Montrer qu'il existe un unique $y \in H$ tel que

$$\forall x \in H, \quad T(x) = (x\ /\ y)\,.$$

5) Trouver cet unique y.
6) Calculer $\|y\|_2$.
7) En déduire la valeur de $\|T\|$.

Exercice II. $(1+1+1+1.5+2+1.5+1+1) = 10$ pts

Soit $(E, \|\bullet\|_1) = \left(l^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}), \|\bullet\|_1\right)$ l'espace de Banach des suites réelles sommables,

$$E = l^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}) = \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| < +\infty \right\}$$

muni de la norme

$$\forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E, \quad \|x\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| .$$

On définit sur E une deuxième norme $\|\cdot\|$, par

$$\forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E, \|x\| = \|x\|_1 + \|x\|_\infty$$

où $\|x\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} (|x_n|)$.

1- Rappeler l'identité du parallélogramme.
2- Donner la définition de deux normes équivalentes.
3- Donner la définition d'un espace de Banach.
4- Montrer qu'il existe un réel $c > 0$ tel que

$$\forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E, \|x\|_\infty \leq c \|x\|_1 .$$

5- Prouver que les deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_1$ sont équivalentes.
6- Est-ce que l'espace $\left(l^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}), \|\cdot\|\right)$ est un espace de Banach?
7- L'identité du parallélogramme est-elle vérifiée pour la norme $\|\cdot\|$?
(Prendre: $u = (1, 0, 0, ...)$ et $v = (0, 1, 0, 0, ...)$)
8- L'espace $\left(l^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}), \|\cdot\|\right)$ est-il un espace de Hilbert?

Remarque: 1) Justifier vos réponses.
2) La tenue de votre copie vaut 02 pts.

Université Mohamed Khider - Biskra
Faculté: SESNV Dpt de Mathématiques $3^{\text{ème}}$A. Maths
A.U: 2022/2023 16/01/2023 10.00-11.30 Amphi I
Corrigé type de l'Examen: Espaces Vectoriels Normés

Corrigé:Exercice I. (1+2+1+1+1+1+1) = 08 pts

1) Voir cours.
2) On a,

$$\forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H,\ \ |T(x)| = |x_{2023}| = \left(x_{2023}^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2\right)^{1/2} = \|x\|_2$$

d'où $c = 1$.
3) D'après (2) T est continue.
4) Comme H est un espace de Hilbert et T une forme linéaire continue sur H, alors d'après le théorème de représentation de Riesz-Fréchet, il existe un unique $y \in H$ tel que

$$\forall x \in H,\ \ T(x) = (x\ /\ y)\,.$$

5) On a, $\forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H$,

$$T(x) = (x\ /\ y) \Longleftrightarrow x_{2023} = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$$

d'où $y = (y_0, ..., y_{2022}, y_{2023}, y_{2024}, ...) = (0, ..., 0, 1, 0, ...) \in H$.
($y_{2023} = 1$ et $\forall n \neq 2023,\ y_n = 0$).
6) On a,

$$\|y\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} y_n^2\right)^{1/2} = 1.$$

7) D'après le théorème de représentation de Riesz-Fréchet,

$$\|T\| = \|y\|_2 = 1.$$

Corrigé:Exercice II. (1+1+1+1.5+2+1.5+1+1) = 10 pts

1- Voir cours.
2- Voir cours.
3- Voir cours.
4- On a,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ |x_n| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |x_k| = \|x\|_1$$

d'où,

$$\forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E, \|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} (|x_n|) \leq \|x\|_1$$

et donc $c = 1$.

5- On a par hypothèse

$$\forall x \in E, \quad \|x\|_1 \leq \|x\|$$

et comme

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \|x\|_1 + \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 + \|x\|_1 = 2\|x\|_1$$

alors

$$\exists \alpha = 1, \ \beta = 2, \ \forall x \in E, \quad \alpha \|x\|_1 \leq \|x\| \leq \beta \|x\|_1$$

et par suite les deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_1$ sont équivalentes.

6- Comme l'espace $\left(l^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}), \|\cdot\|_1\right)$ est complet et les deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_1$ sont équivalentes, alors l'espace $\left(l^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}), \|\cdot\|\right)$ est complet et donc c'est un espace de Banach.

7- On a

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 18 \neq 16 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right).$$

8- Comme l'identité du parallélogramme n'est pas vérifiée pour la norme $\|\cdot\|$ alors l'espace $\left(l^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}), \|\cdot\|\right)$ n'est pas un espace de Hilbert.