UMK BISKRA
DPT MATHEMATIQUES
$3^{ème}$ A. LMD
12/11/2020
09.40-11.10
INTERROGATION

Exercise 1 *Soit* $H = L^2_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$ *l'espace de Hilbert réel des fonctions réelles de carré sommable muni du produit scalaire*

$$\forall f,\ g \in H, \qquad (f\ /\ g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ g(x)\,dx$$

et de la norme associée

$$\forall f \in H, \qquad \|f\| = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\ dx\right)^{1/2}.$$

Soit f *la fonction définie par*

$$\begin{array}{llll} f: & [-\pi, \pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = x. \end{array}$$

1- Montrer que $f \in H$.
2- Caculer les coefficients de la série de Fourier de f

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx \\ \forall n &\geq 1,\quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx \\ \forall n &\geq 1,\quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\ dx. \end{aligned}$$

3- Caculer $\|f\|^2$.
4- En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Solution 2 *1- Comme* f *est continue, elle est dans* H.

2- Comme f est impaire, on a

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0\\
\forall n &\geq 1, \quad a_n = 0\\
\forall n &\geq 1, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\ dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\ dx = -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xd\left(\cos(nx)\right)\\
&= -\frac{1}{n\pi}\left(\left[x\cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\,dx\right) = -\frac{1}{n\pi}\left(2\pi\cos(n\pi) - \left[\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_{-\pi}^{\pi}\right)\\
&= -\frac{2}{n}(-1)^n.
\end{aligned}$$

3- On a

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\ dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\ dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{3}x^3\ \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{3}\pi^2.$$

4- L'égalité de Parseval nous donne

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n^2}{2}$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercise 3 *Soit H un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire $(. \ / \ .)$ et de la norme associée $\|.\|$.*

1) Développer, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x, y \in H$, l'expression

$$\|x + \lambda y\|^2 .$$

2) Soit $x, y \in H$, montrer l'équivalence

$$x \perp y \Longleftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|y\| \leq \|y + \lambda x\| .$$

Solution 4 *1) On a*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \ \forall x, y \in H, \quad \|y + \lambda x\|^2 = (y + \lambda x \ / \ y + \lambda x) = \|y\|^2 + 2\lambda (y \ / \ x) + \lambda^2 \|x\|^2 .$$

2) "$\Longrightarrow$"

$$x \perp y \Longrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \ \|y + \lambda x\|^2 = \|y\|^2 + \lambda^2 \|x\|^2 \geq \|y\|^2$$

d'où

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|y\| \leq \|y + \lambda x\| .$$

"$\Longleftarrow$"

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|y\| \leq \|y + \lambda x\| \Longrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|y\|^2 \leq \|y + \lambda x\|^2 = \|y\|^2 + 2\lambda (y \ / \ x) + \lambda^2 \|x\|^2$$

d'où

$$(y \ / \ x) = 0 \Longleftrightarrow x \perp y.$$

Sinon, prendre $\lambda = -\frac{(y \ / \ x)}{\|x\|^2}$ pour tomber sur une contradiction.

Exercise 5 *Soit H un espace de Hilbert réel. Soit x et y deux éléments de H tel que*

$$\begin{aligned} (x \ / \ y) &= 0 \\ \|x\| &= \sqrt{2} \quad et \quad \|y\| = \sqrt{3} \end{aligned}$$

1- Calculer $\|x+y\|$.
2- En déduire $\|x-y\|$.
3- Donner un exemple.

Solution 6 *1- Le théorème de Pythagore nous donne*

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 = 2 + 3 = 5$$

d'où

$$\|x+y\| = \sqrt{5}.$$

2- L'identité du parallélogramme nous donne

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

d'où

$$\|x-y\| = \sqrt{2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) - \|x+y\|^2} = \sqrt{5}.$$

3-

$$\begin{aligned} H &= \mathbb{R}^2 \\ x &= \left(\sqrt{2}, 0\right), \quad y = \left(0, \sqrt{3}\right). \end{aligned}$$

Exercise 7 *Soit $H = \mathbb{C}^3$ l'espace de Hilbert complexe muni du produit scalaire*

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3)\,,\ y = (y_1, y_2, y_3) \in H, \quad (x \ / \ y) = \sum_{n=1}^{3} x_n \overline{y}_n$$

et de la norme associée $\|.\|$.

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in H, \ \|x\| = \left(\sum_{n=1}^{3} |x_n|^2\right)^{1/2}.$$

Soit $B = \left\{a_1 = (-i, 0, 0)\,,\ a_2 = (0, 2i, 0)\,,\ a_3 = \left(0, 0, \frac{1}{2}i\right)\right\}$ une base de H.
1) En utilisant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, trouver une base orthonormée de H, à partir de la base B.

Solution 8 *On sait que $B = \left\{a_1 = (-i, 0, 0)\,,\ a_2 = (0, 2i, 0)\,,\ a_3 = \left(0, 0, \frac{1}{2}i\right)\right\}$ est une base de l'espace H. Cherchons une base orthonormale pour l'espace H, $\left\{b_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|},\ b_2 = \frac{e_2}{\|e_2\|},\ b_3 = \frac{e_3}{\|e_3\|}\right\}$*

$$\begin{aligned}
e_1 &= a_1 = (-i, 0, 0) \\
e_2 &= a_2 - \frac{(a_2 \ / \ e_1)}{(e_1 \ / \ e_1)} e_1 = a_2 = (0, 2i, 0) \\
e_3 &= a_3 - \frac{(a_3 \ / \ e_1)}{(e_1 \ / \ e_1)} e_1 - \frac{(a_3 \ / \ e_2)}{(e_2 \ / \ e_2)} e_2 = a_3 = \left(0, 0, \frac{1}{2}i\right)
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\|e_1\| &= \left(\sum_{n=1}^{3} |x_n|^2\right)^{1/2} = 1 \\
\|e_2\| &= \left(\sum_{n=1}^{3} |x_n|^2\right)^{1/2} = 2 \\
\|e_3\| &= \left(\sum_{n=1}^{3} |x_n|^2\right)^{1/2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{e_1}{\|e_1\|} = (-i, 0, 0) \\
b_2 &= \frac{e_2}{\|e_2\|} = (0, i, 0) \\
b_3 &= \frac{e_3}{\|e_3\|} = (0, 0, i)\,.
\end{aligned}$$