UMK BISKRA
DPT MATHEMATIQUES
$3^{ème}$ A LMD
29/11/2021
08.00-09.00
INTERROGATION

Exercise 1 *Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé.*

1) Montrer que $\forall x, y \in E, \|x\| \leq \frac{1}{2}(\|x+y\| + \|x-y\|)$.

2) En déduire que $\forall x, y \in E, \|x\| + \|y\| \leq \|x+y\| + \|x-y\|$.

Exercise 2 *Soit* $H = \left(l^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}), \|.\|_2\right)$ *l'espace vectoriel normé des suites réelles de carrés sommables* $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty\right)$, *muni de la norme*

$$\forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}), \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2\right)^{1/2}.$$

Soit l'application linéaire L *définie par*

$$\begin{array}{llll} L: & H & \longrightarrow & H \\ & x = (x_0, x_1, x_2, ...) & \longmapsto & L(x) = (x_2, x_3, x_4, ...) \end{array}$$

1) Calculer $\|L(x)\|_2$.

2) Montrer qu'il existe un nombre réel $C > 0$ *tel que*

$$\forall x \in H, \|L(x)\|_2 \leq C \|x\|_2.$$

3) En déduire que L *est continue.*

Soit la suite $y = (0, 0, 1, 0, 0, ...)$.

4) Calculer $\|y\|_2$.

5) Est-ce que $y \in H$?

6) Calculer $\|L(y)\|_2$.

7) Montrer que

$$\|L\| = \sup_{\|x\|_2 = 1} (\|L(x)\|_2) \geq \|L(y)\|_2.$$

8) En déduire la valeur de $\|L\|$.

Solution 3 *1. Il suffit de remarquer que* $x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}$
et appliquer l'inégalité triangulaire.
ou bien par l'inégalité triangulaire, on a

$$\forall x, y \in E,\ \frac{1}{2}\left(\|x+y\| + \|x-y\|\right) \geq \frac{1}{2}\|x+y+x-y\| = \frac{1}{2}\|2x\| = \|x\|.$$

2. D'après 1. on a $\|x\| \leq \frac{1}{2}\left(\|x+y\| + \|x-y\|\right)$
en remplaçant x *par* y *on a* $\|y\| \leq \frac{1}{2}\left(\|x+y\| + \|x-y\|\right)$,
en sommant ces deux inégalités on obtient le résultat demandé.

Solution 4 *1) On a,*

$$\|L(x)\|_2 = \left(\sum_{n=2}^{+\infty} |x_n|^2\right)^{1/2}.$$

2) On a,

$$\forall x \in H, \|L(x)\|_2 = \left(\sum_{n=2}^{+\infty} |x_n|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2\right)^{1/2} = \|x\|_2$$

d'où $C = 1$.
3) D'e (2) on en déduit que L *est continue.*
4) On a,

$$\|y\|_2 = \|(0,0,1,0,0,...)\|_2 = (0+0+1+0+0+...)^{1/2} = 1.$$

5) Comme $\|y\|_2 = 1 < +\infty$ *alors* $y \in H$.
6) On a,

$$\|L(y)\|_2 = \|(1,0,0,...)\|_2 = (1+0+0+...)^{1/2} = 1.$$

7) Comme $\|y\|_2 = 1$ *alors*

$$\|L\| = \sup_{\|x\|_2 = 1} \left(\|L(x)\|_2\right) \geq \|L(y)\|_2 = 1.$$

8) De (2) et (7) on en déduit que

$$\|L\| = 1.$$