Université Mohamed Khider − Biskra
Faculté: SESNV Dpt de Mathématiques $3^{\text{ème}}$A. Maths
A.U: 2022/2023 18/12/2022 09.40-10.40
INTERROGATION II : Espaces Vectoriels Normés

Exercise 1 *(1.5+1.5+1+1.5+1+1.5)=08 pts*

Soit $H = l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$ *l'espace de Hilbert des suites complexes* $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *muni du produit scalaire*

$$\forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H,\ \forall\ y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H, \quad (x\ \diagup y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \overline{y}_n$$

et de la norme associée

$$\forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H, \quad \|x\| = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2\right)^{1/2}$$

et soit F *le sous-espace vectoriel de* H

$$F = \left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H\ /\ x_{2n} = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}\right\}.$$

1 - Montrer que la forme linéaire

$$\begin{array}{cccc} g_n : & H & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & g_n(x) = x_{2n} \end{array}$$

*est **continue** sur* H.
2 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, *le sous-espace vectoriel de* H

$$F_n = \left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H\ /\ x_{2n} = 0\right\}$$

*est **fermé** dans* H.
3 - En déduire que F *est **fermé** dans* H.
4 - Trouver $F^{\perp}$, *l'**orthogonal** à* F.
5 - Montrer que

$$H = F \oplus F^{\perp}.$$

6 - Trouver $P_{F^{\perp}}(a)$ *la **projection orthogonale** de* $a = (1, -i, 0, 2i, 0, ...) \in H$ *sur* $F^{\perp}$.

Université Mohamed Khider − Biskra
Faculté: SESNV Dpt de Mathématiques $3^{\text{ème}}$A. Maths
A.U: 2022/2023 18/12/2022 09.40-10.40

CORRIGE DE L'INTERROGATION II

Solution 2 *(1.5+1.5+1+1.5+1+1.5)=08 pts*

1 - On a

$$\forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H, \quad |g_n(x)| = |x_{2n}| \leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2\right)^{1/2} = \|x\|$$

et donc g_n est continue.

2 - On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} F_n &= \left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H \ / \ x_{2n} = 0\right\} = \left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H \ / \ g_n(x) = x_{2n} = 0\right\} \\ &= Ker\,(g_n)\,. \end{aligned}$$

Comme la fonction

$$\begin{array}{rccc} g_n : & H & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & g_n(x) = x_{2n} \end{array}$$

est une forme linéaire continue, le s-e-v $Ker\,(g_n)$ est fermé.

Le s-e-v F_n est donc fermé dans H pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3 - On en déduit de (2) que le sous-espace F

$$\begin{aligned} F &= \left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H \ / \ x_{2n} = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H \ / \ g_n(x) = x_{2n} = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}\right\} \\ &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n. \end{aligned}$$

est fermé dans H comme intersection de fermés.

4 - On a

$$\begin{aligned} F^{\perp} &= \left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H \ / \ \forall y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F, \quad (x \ / y) = 0\right\} \\ &= \left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H \ / \ \forall y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \overline{y}_n = 0\right\} \\ &= \left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H \ / \ \forall y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} x_{2n+1} y_{2n+1} = 0\right\} \\ &= \left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H \ / \quad x_{2n+1} = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}\right\}. \end{aligned}$$

5 - Comme H est un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel fermé de H, alors, $H = F \oplus F^{\perp}$.

6 - Comme $a = (1, -i, 0, 2i, 0, ...) \in H$, s'écrit d'une manière unique

$$a = (1, -i, 0, 2i, 0, ...) = (0, -i, 0, 2i, 0, ...) + (1, 0, 0, 0, 0, ...)$$

avec $(0, -i, 0, 2i, 0, ...) \in F$ et $(1, 0, 0, 0, 0, ...) \in F^{\perp}$.

Alors la projection orthogonale de $a = (1, -i, 0, 2i, 0, ...) \in H$ sur $F^{\perp}$ est

$$P_{F^{\perp}}\,(a) = (1, 0, 0, 0, 0, ...)\,.$$