DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
UNIVERSITE DE BISKRA
MODULE

$2^{\text{ème}}$ Année Master Maths
Premier semestre, année 2020/2021
Mouvement Brownien et calcul stochastique

Examen

3pts

Exercice 1. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien. Montrer que

$$X_t = B_{1-t} - B_1, \qquad t \in [0,1]$$

est un mouvement Brownien.

4pts

Exercice 2. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien standard et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle. Montrer que le processus suivant est une $\mathcal{F}_t$-martingale :

$$B_t^3 - 3tB_t, \qquad t \geq 0.$$

6pts

Exercice 3. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien standard. On définit les processus

$$Y_t = \int_0^t e^s dB_s \qquad \text{et} \qquad Z_t = \int_0^t Y_s dB_s.$$

(1) Montrer que Y_t est bien défini.
(2) Quelle est la loi de Y_t. Calculer $E[Y_t]$ et $E[Y_t^2]$.
(3) Montrer que Z_t est bien défini. Est-ce que Z_t est une martingale?
(4) Calculer $E[Z_t]$ et $E[Z_t^2]$.

3pts

Exercice 4. Calculer l'intégrale stochastique

$$\int_0^t B_s^{1/2} dB_s.$$

4pts

Exercice 5. Résoudre l'EDS

$$dX_t = -\frac{1}{2}X_t dt + \sqrt{1 - X_t^2} dB_t, \qquad X_0 = 0$$

à l'aide du changement de variable $Y = Arc\sin(X)$.

Corrigé type : Examen

Exercice 1 : (3 pts) B_t - M.B $\quad X_t = B_{1-t} - B_1, \quad t \in [0,1]$.

① $X_0 = B_1 - B_1 = 0$.

② X_t est continu (transformation continue du M.B.B)

③ $0 \leq s < t < 1$

$$X_t - X_s = (B_{1-t} - B_1) - (B_{1-s} - B_1) = B_{1-t} - B_{1-s}$$
$$= -(B_{1-s} - B_{1-t})$$

on sait que $B_{1-s} - B_{1-t} \sim N(0, t-s)$

$$\Rightarrow X_t - X_s \sim N(0, t-s).$$

X_t est accroissements stationnaires et suivent la la loi normale.

④ $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4 \leq 1$.

$$Cov(X_{t_4} - X_{t_3}, X_{t_2} - X_{t_1}) = Cov(B_{1-t_4} - B_{1-t_3}, B_{1-t_2} - B_{1-t_1})$$

$$= cov(B_{1-t_4}, B_{1-t_2}) - cov(B_{1-t_4}, B_{1-t_1}) - cov(B_{1-t_3}, B_{1-t_2})$$
$$+ cov(B_{1-t_3}, B_{1-t_1}) =$$

$$= 1 - t_4 - (1-t_4) - (1-t_3) + (1-t_3) = \cancel{1} - \cancel{t_4} - \cancel{1} + \cancel{t_4} - \cancel{1} + \cancel{t_3} + \cancel{1} - \cancel{t_3}$$
$$= 0.$$

$\Rightarrow$ les accroissements de X_t sont indépendantes.

$\Rightarrow X_t$ est M.B. standard.

(4 pts) : $B_t^3 - 3t B_t$, $t \geq 0$

est une $\mathcal{F}_t$-martingale.

$$E(B_t^3 | \mathcal{F}_s) = E((B_t - B_s + B_s)^3)$$
$$= B_s^3 + 3B_s(t-s).$$

B_t est une $\mathcal{F}_t$-martingale

$$E(B_t^3 - 3tB_t | \mathcal{F}_s) = B_s^3 + 3(t-s)B_s - 3t B_s$$
$$= B_s^3 - 3s B_s.$$

ce qui prouve que $B_t^3 - 3t B_t$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale.

Exercice 3 : $Y_t = \int_0^t e^s dB_s$, $Z_t = \int_0^t Y_s dB_s$

(6 pts)

① Y_t est bien défini

$$\int_0^t (e^s)^2 dt = \int_0^t e^{2s} dt = 1/2 e^{2s} \Big|_0^t = 1/2 (e^{2t} - 1) < \infty$$

$Y_t = \int_0^t e^s dB_s$ est une intégrale de Wiener

② $X_t \sim N\left(0, \int_0^t (e^s)^2 ds\right) = N\left(0, \frac{1}{2}(e^{2t}-1)\right)$.

$\Rightarrow E(X_t) = 0$

$E(Y_t^2) = Var(Y_t^2) = \int_0^t e^{2s} ds = \frac{1}{2}(e^{2t}-1)$

③ $Z_t = \int_0^t Y_s dB_s$.

$E(Y_t^2) = \frac{1}{2}(e^{2t}-1) < \infty$, $Y_t^2 \in L^2[0,t]$.

$\Rightarrow$ l'intégrale $Z_t = \int_0^t Y_s dB_s$ est bien définie.

d'après cours Z_t est une martingale.

④ $E(Z_t) = 0$

$E(Z_t^2) = \frac{1}{4}(e^{2t}-1-2t)$.

Exercice 4 : $\int_0^t B_s^{1/2} dB_s$

3pts

La formule d'Itô, on a :

$d(B_t^{3/2}) = \frac{3}{2} B_t^{1/2} dB_t + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} B_t^{-1/2}\right) dt$.

$$= \int_0^t \frac{3}{2} B_s^{1/2} dB_s + \frac{3}{8}\int_0^t B_s^{-1/2} ds.$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} B_t^{3/2} = \int_0^t B_s^{1/2} dB_s + \frac{1}{4}\int_0^t B_s^{-1/2} ds.$$

$$\Rightarrow \int_0^t B_s^{1/2} dB_s = \frac{2}{3} B_t^{3/2} - \frac{1}{4}\int_0^t B_s^{-1/2} ds.$$

Exercice 5 : 4 pts

$$dX_t = -\tfrac{1}{2} X_t dt + \sqrt{1-X_t^2}\, dB_t, \qquad X_0 = 0$$

$Y_t = \operatorname{Arc\,sin}(X_t)$, $\quad X_t \in]-1,1[$

posons $f(x) = \operatorname{Arc\,sin}(x)$,

Formule d'Itô :

$$dY_t = \frac{dX_t}{\sqrt{1-X_t^2}} + \frac{1}{2}\frac{X_t}{(1-X_t^2)^{3/2}} dX_t^2 = dB_t$$

$\Rightarrow dY_t = dB_t \Rightarrow Y_t = B_t$

$\Rightarrow X_t = \sin(Y_t) \quad \Rightarrow \boxed{X_t = \sin(B_t)}$