Departement de Mathematiques
Universite de Biskra
Module

$2^{ième}$ Année Master Maths
Premier semestre, année 2022/2023
Mouvement Brownien et calcul stochastique

Examen

On travaille toujours sur un espace de probabilité filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t\geq 0}, P\right)$ *sur lequel est défini un* $(\mathcal{F})_{t\geq 0}$*-mouvement Brownien* $B = (B_t)_{t\geq 0}$.

6 pts

Exercice 1. Soit $X_t = e^{B_t}$.

(1) Montrer que X_t n'est pas une martingale.
(2) Montrer que $e^{-t/2}X_t$ est une martingale.
(3) Trouver $Cov(X_s, X_t)$
- par un calcul direct,
- en utilisant la question 2.

3pts

Exercice 2. Soit $Y = \int_1^T \sqrt{t}dB_t$.

Montrer que Y est une variable aléatoire de loi normale d'espérance 0 et de variance $(T^2-1)/2$.

3pts

Exercice 3. Vérifier la formule

$$\int_0^t sB_s dB_s = \frac{t}{2}\left(B_t^2 - \frac{t}{2}\right) - \frac{1}{2}\int_0^t B_s^2 ds.$$

3pts

Exercice 4. Montrer en utilisant la formule d'Itô que

(1) $\int_0^t \sin B_s dB_s = 1 - \cos B_t - \frac{1}{2}\int_0^t \cos B_s ds$.
(2) $\int_0^t e^{s/2}\cos B_s dB_s = e^{t/2}\sin B_t$.

5pts

Exercice 5. Résoudre l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = t^2 dt + e^{t/2}\cos B_t dB_t, \qquad X_0 = 0$$

et trouver $E(X_t)$ et $Var(X_t)$.

Corrigé type : Examen de MB et CS (2022/2023)

Exercice 1 : $X_t = e^{B_t}$

(1) $E(X_t \mid \mathcal{F}_s) = E(e^{B_t} \mid \mathcal{F}_s) = E(e^{B_t - B_s} e^{B_s} \mid \mathcal{F}_s)$

$$= e^{B_s} E(e^{B_t - B_s} \mid \mathcal{F}_s)$$

$$= e^{B_s} E(e^{B_t - B_s}) = e^{B_s} e^{t/2} e^{-s/2}$$

(2) Ceci peut être écrit comme

$$E(e^{-t/2} e^{B_t} \mid \mathcal{F}_s) = e^{-t/2} e^{B_s} e^{t/2} \cdot e^{-s/2} = e^{-s/2} e^{B_s}$$

$\Rightarrow e^{-t/2} e^{B_s}$ est une martingale.

(3) (a) $\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = E(X_s X_t) - E(X_s)E(X_t)$

$$= E(X_s X_t) - e^{t/2} \cdot e^{s/2}$$

$$= E(e^{B_s + B_t}) - e^{t/2} \cdot e^{s/2}$$

$$= E(e^{B_t - B_s} e^{2(B_s - B_0)}) - e^{t/2} \cdot e^{s/2}$$

$$= E(e^{B_t - B_s}) E(e^{2(B_s - B_0)}) \; e^{t/2} \cdot e^{s/2}$$

$$= e^{(t-s)/2} e^{2s} - e^{t/2} e^{s/2}$$

$$= e^{\frac{t+3s}{2}} - e^{(t+s)/2}$$

(b) On a :

$$E(X_s X_t) = E(E(X_s X_t \mid \mathcal{F}_s)) = E(X_s E(X_t \mid \mathcal{F}_s))$$

$$= e^{t/2} E(X_s E(e^{-t/2} X_t \mid \mathcal{F}_s)) = e^{t/2} E(X_s \cdot e^{-s/2} \cdot X_s)$$

$$= e^{(t-s)/2} E(X_s^2) = e^{(t-s)/2} E(e^{2B_s}) = e^{(t-s)/2} \cdot e^{2s}$$

$$= e^{(t+3s)/2}$$

on continue comme dans (a).

Exercice 2 $Y = \int_1^T \sqrt{t}\, dB_t$.

on a que $f(t) = \sqrt{t}$ est une fonction déterministe
$t \in [1, T]$

et que $\int_1^T f^2(t)dt = \int_1^T (\sqrt{t})^2 dt = \int_1^T t dt = \frac{t^2}{2}\Big|_1^T = (T^2-1)/2 < \infty$

$\Rightarrow f^2 \in L^2$.

Nous somme dans le cas de l'intégrale de Wiener.

$\Rightarrow Y$ est une v.a gaussiene (de loi normale)

et $E(Y) = 0$

et $var\, Y = \int_1^T (f(t))^2 dt = \int_1^T t dt = (T^2-1)/2$.

Exercice 3 : Vérifions la formule

$$\int_0^t sB_s dB_s = \frac{t}{2}\left(B_t^2 - \frac{t}{2}\right) - \frac{1}{2}\int_0^t B_s^2 ds$$

Considérons les processus $X_t = \int_0^t sB_s dB_s$, $Y_t = \frac{t}{2}\left(B_t^2 - \frac{t}{2}\right)$

et $Z_t = \frac{1}{2}\int_0^t B_s^2 ds$

On a :
$$dX_t = tB_t dB_t$$
$$dZ_t = \frac{1}{2} B_t^2 dt.$$

Appliquant la formule d'Itô, on obtient

$dY_t = d\left(\frac{t}{2}\left(B_t^2 - t/2\right)\right) = \frac{1}{2}\left(tB_t^2\right) - d\left(t^2/4\right)$

1

$\frac{1}{2}\left((t+B_t^2)dt + 2t\,\boxed{B_t}\,dB_t\right) - \frac{1}{2}t\,dt$

$= \frac{1}{2}B_t^2 dt + t B_t dB_t$.

on peut voir que $dX_t = dY_t - dZ_t$

$\Rightarrow d(X_t - Y_t + Z_t) = 0$ ie : $X_t - Y_t + Z_t = c$.

puisque $X_0 = Y_0 = Z_0 = 0 \Rightarrow c = 0$

Ceci démontre le résultat désiré.

Exercice 4 : (1) Soit $f(x) = \cos x$, $f \in \mathcal{C}^2$

calculons $f(B_t)$, Par la formule d'Itô

$f(B_t) = f(0) + \int_0^t f'(B_s)\,dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)\,ds$

$\Rightarrow \cos(B_t) = \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\cos(0)} - \int_0^t \sin B_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \cos B_s ds$

$\Rightarrow \int_0^t \sin B_s dB_s = 1 - \cos B_t - \frac{1}{2}\int_0^t \cos B_s ds$

(2) Soit $g(t,x) = e^{t/2}\,\cancel{\sin}\,B_t$, $g \in \mathcal{C}^{1,2}$

Par la formule d'Itô

$g(t,B_t) = g(0,0) + \int_0^t \left(\frac{\partial g}{\partial t}(s,B_s) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s,B_s)\right)ds + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s,B_s)\,dB_s$

$\Rightarrow e^{t/2}\sin B_t = \int_0^t \left(\cancel{\frac{1}{2}e^{s/2}\sin B_s - \frac{1}{2}e^{s/2}\sin B_s}\right)ds + \int_0^t e^{s/2}\cos B_s dB_s$

$\Rightarrow \int_0^t e^{s/2}\cos B_s dB_s = e^{t/2}\sin B_t$.

...tices : l'EDS

$$dX_t = t^2 dt + e^{t/2} \cos B_s dB_s \,, \quad X_0 = 0$$

$$X_t = \int_0^t s^2 ds + \int_0^t e^{s/2} \cos B_s dB_s = t^3/3 + e^{t/2} \sin B_t$$

(par ex 4)

Si X_t n'est pas gaussien on peut calculer son espérance et sa variance.

Puisque les intégrales d'Itô ont une espérance nulle.

$$E(X_t) = E\left(\int_0^t s^2 ds + \int_0^t e^{s/2} \cos B_s dB_s\right) = \int_0^t s^2 ds = \frac{t^3}{3}$$

Puisque la covariance de fonctions déterministes est nulle

$$Var(X_t) = Var\left(t^3/3 + e^{t/2} \sin B_t\right) = \left(e^{t/2}\right)^2 Var(\sin B_t).$$

$$= e^t E(\sin^2 B_t) = \frac{e^t}{2}\left(1 - E(\cos(2B_t))\right)$$

Pour calculer la dernière espérance on utilise la formule d'Itô :

$$d(\cos 2B_t) = -2 \sin(2B_t) dB_t - 2 \cos(2B_t) dt$$

en intégrant on trouve

$$\cos 2B_t = \cos 2B_0 - 2\int_0^t \sin 2B_s dB_s - 2\int_0^t \cos 2B_s ds$$

en prenant l'espérance et en utilisant le fait que les intégrales d'Itô ont une espérance nulle :

$E(\cos 2B_t) = 1 - 2\int_0^t E(\cos 2B_s)\,ds$

Si on désigne par $m(t) = E(\cos(2B_t))$

la relation précédente devient une équation intégrale

$$m(t) = 1 - 2\int_0^t m(s)\,ds.$$

En dérivant, on obtient

$$m'(t) = -2\,m(t)$$

$\Rightarrow m(t) = k e^{-2t}$ et puisque $k = m(0) = E(\cos 2B_0) = 1$

on a $\boxed{m(t) = e^{-2t}}$

$\Rightarrow Var(X_t) = \dfrac{e^t}{2}\left(1 - e^{-2t}\right) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} = sh\, t$

En conclusion, la solution X_t admet l'espérance et la variance données par.

$$E(X_t) = t^3/3 \quad , \quad Var(X_t) = sh\, t.$$

PB