DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
UNIVERSITE DE BISKRA
MODULE

$2^{ième}$ Année Master Maths
Premier semestre, année 2022/2023
Mouvement Brownien et calcul stochastique

INTERROGATION 1

Exercice 1. Utiliser la propriété martingale de $B_t^2 - t$ pour trouver:
a) $E\left[\left(B_t^2 - t\right)\left(B_s^2 - s\right)\right]$
b) $E\left[B_t^2 / \mathcal{F}_s\right]$.

Exercice 2. Considérons le processus

$$Z_t = \int_0^t B_u du, \qquad t > 0.$$

a) Montrer que $E\left(Z_T / \mathcal{F}_t\right) = Z_t + B_t(T - t), \quad \forall t < T$.
b) Montrer que le processus $M_t = Z_t - tB_t$ est une $\mathcal{F}_t-$martingale.

Exercice 3. Montrer que la variable aléatoire

$$X = \int_1^T \frac{1}{\sqrt{t}} dB_t$$

est gaussienne d'espérance 0 et de variance $\ln T$.

Corrigé type : Interrogation 1

Exercice 1 :

ⓐ Soit $s<t$. Alors

$$E\left[(B_t^2-t)(B_s^2-s)\right] = E\left[E\left[(B_t^2-t)(B_s^2-s)\right] \mid \mathcal{F}_s\right]$$

$$= E\left[(B_s^2-s)\,E\left[(B_t^2-t) \mid \mathcal{F}_s\right]\right]$$

$$= E\left[(B_s^2-s)(B_s^2-s)\right]$$

$$= E\left[(B_s^2-s)^2\right] = E\left[B_s^4 - 2sB_s^2 + s^2\right]$$

$$= E\left[B_s^4\right) - 2s\,E\left(B_s^2\right) + s^2$$

$$= 3s^2 - 2s^2 + s^2 = 2s^2$$

ⓑ $$E\left[B_t^2 \mid \mathcal{F}_s\right] = E\left[B_t^2 - t + t \mid \mathcal{F}_s\right] = E\left[B_t^2 - t \mid \mathcal{F}_s\right) + t$$

$$= B_s^2 - s + t.$$

Exercice 2 :

$$Z_t = \int_0^t B_u\,du, \quad t>0$$

ⓐ $$E\left(Z_T \mid \mathcal{F}_t\right) = E\left(\int_0^T B_u\,du \mid \mathcal{F}_t\right)$$

$$= E\left[\int_0^t B_u\,du \mid \mathcal{F}_t\right] + E\left[\int_t^T B_u\,du \mid \mathcal{F}_u\right]$$

$$= Z_t + E\left[\int^T B_u\,du \mid \mathcal{F}_t\right]$$

$$= Z_t + E\left[\int_t^T (B_u - B_t + B_t)\,du \mid \mathcal{F}_t\right]$$

$= Z_t + E\left[\int_t^T (B_u - B_t)\,du \mid \mathcal{F}_t\right] + B_t(T-t)$

$= Z_t + E\left[\int_t^T (B_u - B_t)\,du\right] + B_t(T-t)$

$= Z_t + \int_t^T E(B_u - B_t)\,du + B_t(T-t)$

$= Z_t + B_t(T-t)$ puisque $E(B_u - B_t) = 0$

(b) Soit $0 < t < T$. en utilisant (a) on a

$E[Z_T - TB_T \mid \mathcal{F}_t] = E[Z_T \mid \mathcal{F}_t] - T\,E[B_T \mid \mathcal{F}_t]$

$= Z_t + B_t(T-t) - TB_t$

$= Z_t - tB_t$

Exercice 3 : $\quad X = \int_1^T \frac{1}{\sqrt{t}}\,dB_t$.

on a que $\int_1^T \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2 dt = \int_1^T \frac{1}{t}\,dt = \ln T - \ln 1 = \ln T$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{t}} \in L^2([1,T])$.

~~Nous~~ Nous sommes dans le cas d'une intégrale de Wiener $\Rightarrow X$ est gaussienne tel que

$E(X) = 0$

et $Var(X) = \int_1^T \frac{1}{t}\,dt = \ln T$.

c'est-à-dire $X \sim N(0, \ln T)$.