Departement de Mathematiques
Universite de Biskra
Module

$2^{ième}$ Année Master Maths
Premier semestre, année 2022/2023
Mouvement Brownien et calcul stochastique

INTERROGATION 2

Exercice 4. Utiliser la formule d'Itô pour trouver:
a) $d(B_t e^{B_t})$
b) $d(e^{t+B_t^2})$

Exercice 5. Vérifier la formule

$$\int_0^t (B_s^2 - s) dB_s = \frac{1}{3} B_t^3 - tB_t.$$

Exercice 6. Résoudre l'EDS suivante pour $t \geq 0$ et déterminer l'espérance et la variance de la solution

$$dX_t = \frac{t}{1+t^2} dt + t^{3/2} dB_t, \quad X_0 = 1.$$

Exercice 7. Résoudre l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = (B_t - 1)\, dt + B_t^2 dB_t, \quad X_0 = 0.$$

Corrigé type : interrogation 2

Exercice 4 : Par la formule d'Itô :

ⓐ $$d\left(B_t e^{B_t}\right) = e^{B_t}\left(1+\frac{1}{2}B_t\right)dt + e^{B_t}\left(1+B_t\right)dB_t$$

ⓑ $$d\left(e^{t+B_t^2}\right) = 2e^{t+B_t^2}\left(1+B_t^2\right)dt + 2e^{t+B_t^2}B_t\,dB_t.$$

Exercice 5 : vérifions que

$$\int_0^t \left(B_s^2 - s\right)dB_s = \frac{1}{3}B_t^3 - tB_t$$

Considérons la fonction $f(t,x) = \frac{1}{3}x^3 - tx$.

On a : $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = -x$, $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = x^2 - t$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) = 2x$

$\Rightarrow f \in \mathcal{C}^{1,2}$

La formule d'Itô :

$$df(t,B_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,B_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t,B_t)dB_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,B_t)(dB_t)^2$$

$$= -B_t dt + \left(B_t^2 - t\right)dB_t + \frac{1}{2}2B_t . dt$$

$$= \left(B_t^2 - t\right)dB_t.$$

$$\Rightarrow \int_0^t \left(B_s^2 - s\right)dB_s = \int_0^t df(s,B_s) = f(s,B_s)\Big|_0^t = f(t,B_t) - f(0,B_0)$$

$$= f(t,B_t) = \frac{1}{3}B_t^3 - tB_t.$$

...ice 6 : $dX_t = \frac{t}{1+t^2}dt + t^{3/2}dB_t, \quad X_0 = 1.$

$$\int_0^t dX_s = \int_0^t \frac{s}{1+s^2}ds + \int_0^t s^{3/2}dB_s$$

$$\Rightarrow X_t - 1 = \frac{1}{2}\ln(1+s^2)\Big|_0^t + \int_0^t s^{3/2}dB_s$$

$$\Rightarrow X_t = 1 + \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + \int_0^t s^{3/2}dB_s$$

la solution de l'EDS.

$E(X_t) = 1 + \frac{1}{2}\ln(1+t^2)$ puisque : $E\left(\int_0^t s^{3/2}dB_s\right) = 0$

et

$$\mathrm{Var}(X_t) = \int_0^t \left(s^{3/2}\right)^2 ds = \int_0^t s^3 ds = \frac{s^4}{4}\Big|_0^t = \frac{t^4}{4}$$

Exercice 7 : $dX_t = (B_t - 1)dt + B_t^2 dB_t, \quad X_0 = 0$

Intégrons l'eq entre 0 et t,

$$X_t = \int_0^t dX_s = \int_0^t (B_s - 1)ds + \int_0^t B_s^2 dB_s$$

$$= \int_0^t B_s ds - \int_0^t ds + \int_0^t B_s^2 dB_s$$

$$= \int_0^t B_s ds - t + \int_0^t B_s^2 dB_s$$

Calculons l'intégrale stochastique $\int_0^t B_s^2 dB_s$

la formule d'Itô, on a :

$$d(B_t^3) = 3B_t^2\,dB_t + \frac{6}{2} B_t\,dt \Rightarrow \frac{1}{3} B_t^3 = \int_0^t B_s^2\,dB_s + \int_0^t B_s\,ds$$

$$\Rightarrow \int_0^t B_s^2\,ds = \frac{1}{3} B_t^3 - \int_0^t B_s\,ds$$

$$\Rightarrow X_t = \cancel{\int_0^t B_s\,ds} - t + 1/3\, B_t^3 - \cancel{\int_0^t B_s\,ds}$$

$$= 1/3\, B_t^3 - t.$$