Departement de Mathematiques
Universite de Biskra
Module

$2^{ième}$ Année Master Maths
Premier semestre, année 2020/2021
Mouvement Brownien et calcul stochastique

INTERROGATION

2,5

Exercice 1. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien et $(L_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique définit par :

$$L_t = 1/2\left(B_t^2 - t\right), \qquad t \geq 0.$$

Montrer que L_t est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s : s \leq t)$.

2,5

Exercice 2. Démontrer que si M_t est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_t$, alors

$$E\left(M_t^2 - M_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right) = E\left[\left(M_t - M_s\right)^2 \mid \mathcal{F}_s\right].$$

2,5

Exercice 3. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien standard et

$$X = \int_0^1 B_t dt.$$

Trouver la loi de X.
Indication : Utiliser la formule d'intégration par parties.

2,5

Exercice 4. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien standard. Montrer que

$$tB_t^2 = 2\int_0^t sB_s dB_s + \int_0^t B_s^2 ds + \frac{1}{2}t^2.$$

Ex1 : $(B_t)_{t\geq 0}$ M.B , $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s : s \leq t)$

$L_t = \frac{1}{2}(B_t^2 - t)$, $t \geq 0$.

$s \leq t$

$$E(L_t \mid \mathcal{F}_s) = \frac{1}{2} E(B_t^2 \mid \mathcal{F}_s) - \frac{1}{2}t$$

$$= \frac{1}{2} E\left((B_t - B_s + B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right) - 1/2\, t$$

$$= \frac{1}{2} E\left((B_t - B_s)^2 + 2(B_t - B_s)B_s + B_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right) - \frac{1}{2}t$$

$$= \frac{1}{2} E\left[(B_t - B_s)^2\right] + 2 B_s E\left[(B_t - B_s)\right] + E\left[B_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right] - \frac{1}{2}t$$

$$= \frac{1}{2}(t-s) + \frac{1}{2}B_s^2 - \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}(B_s^2 - s).$$

$$= L_s$$

Ex 2 :

M martingale

$$E\left((M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right)$$

$$= E\left(M_t^2 + M_s^2 - 2M_sM_t \mid \mathcal{F}_s\right)$$

$$= E\left(M_t^2 + M_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right) - 2E\left(M_sM_t \mid \mathcal{F}_s\right) \quad \text{linéarité}$$

$$= E\left(M_t^2 + M_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right) - 2M_s \underbrace{E\left(M_t \mid \mathcal{F}_s\right)}_{M_s} \quad \left\{\begin{array}{l} M_s \text{ est} \\ \mathcal{F}_s \text{ mes} \end{array}\right.$$

$$= E\left(M_t^2 + M_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right) - 2M_s^2 \quad (M \text{ est une martingale}$$

$$= E\left(M_t^2 - M_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right)$$

Ex3 : $(B_t)_{t\geq 0}$ M.B

$$X = \int_0^1 B_t\,dt$$

<u>loi de X :</u>

intégrant par parties, on obtient :

$$X(\omega) = \int_0^1 B_t(\omega)\,dt = B_t(\omega)(t-1)\Big|_0^1 - \int_0^1 (t-1)\,dB_t(\omega)$$

$$= \int_0^1 (1-t)\,dB_t(\omega)$$

intégrale de Wiener $\Rightarrow$ X est normalement distribuée d'espérance 0 et de variance :

$$\int_0^1 (1-t)^2\,dt = 1/3$$

<u>ou</u>

$$X = \int_0^1 B_t\,dt = tB_t\Big|_0^1 - \int_0^1 t\,dB_t = B_1 - \int_0^1 t\,dB_t$$

$$= \int_0^1 dB_t - \int_0^1 t\,dB_t = \int_0^1 (1-t)\,dB_t$$

intégrale de Wiener $\Rightarrow$ X est de loi normale d'espérance 0 et de variance :

$$\int_0^1 (1-t)^2\,dt = 1/3$$

1: $(B_t)_{t\geq 0}$ M.B standard.

$f(t,x) = tx^2$, on a

$\frac{\partial f}{\partial t} = x^2$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 2tx$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2t$.

on a par la formule d'Itô:

$$f(t,B_t) = tB_t^2 = f(0,B_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,B_s)\,dB_s + \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial t}(s,B_s) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,B_s)\right) ds$$

$$= \int_0^t 2sB_s\,dB_s + \int_0^t (B_s^2 + s)\,ds$$

$$= 2\int_0^t sB_s\,dB_s + \int_0^t B_s^2\,ds + \int_0^t s\,ds$$

$$= 2\int_0^t sB_s\,dB_s + \int_0^t B_s^2\,ds + \frac{1}{2}t^2$$