DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
UNIVERSITE DE BISKRA
MODULE

$2^{ième}$ Année Master Maths
Premier semestre, année 2021/2022
Mouvement Brownien et calcul stochastique

INTERROGATION

Exercice 1. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien standard. Pour $0 < s < t$, calculer

(4)

$$E\left[B_s^2 B_t^2\right]$$

Exercice 2. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien standard. Montrer que

(4)

$$\left\{(1+t)\, B_{\frac{t}{1+t}} - tB_1\right\}_{t\geq 0}$$

est un mouvement Brownien.

Exercice 3. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien standard et

(4)

$$X = \int_0^1 B_t dt.$$

Trouver la loi de X.
Indication : Utiliser la formule d'intégration par parties.

(4) **Exercice 4.** Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien standard. Dans chacun des cas suivants montrer que $\{Z_t\}_{t\geq 0}$ est un processus d'Itö, calculer sa différentielle stochastique et déterminer si $\{Z_t\}_{t\geq 0}$ est une martingale.

1) $Z_t = t^2 B_t - 2\int_0^t s dB_s$.
2) $Z_t = B_t^2(B_t^2 - 6t)$.

(4) **Exercice 5.** Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien standard. Trouver $\langle X\rangle_t$, $\langle Y\rangle_t$ et $\langle X, Y\rangle_t$ où

$$X_t = B_t^2 - t, \qquad Y_t = e^{B_t - \frac{t}{2}}.$$

~~Corrigé type~~ : Interrogation
MB et CS (2021/2022)

Ex01 : $0 < s < t$

$$E\left[B_s^2 B_t^2\right] = E\left[B_s^2\left((B_t - B_s) + B_s\right)^2\right]$$

$$= E\left[B_s^2 (B_t - B_s)^2\right] + 2\left[B_s^3 (B_t - B_s)\right] + E\left[B_s^4\right]$$

4

$$= E\left[B_s^2\right] \cdot E\left[(B_t - B_s)^2\right] + 2E\left[B_s^3\right] \cdot E\left[(B_t - B_s)\right] + E\left[B_s^4\right]$$

$$= s.(t-s) + 0 + 3s^2 = 2s^2 + st$$

(puisque B_s et $(B_t - B_s)$ sont indépendants).

Ex02 : $\left\{(1+t) B_{\frac{t}{1+t}} - t B_1\right\}_{t \geq 0}$ est un MB.

Il n'y a pas de pb de continuité, il est gaussien.

On a pour $s \leq t$,

$$\text{Cov}\left((1+t) B_{\frac{t}{1+t}} - t B_1, (1+s) B_{\frac{s}{1+s}} - s B_1\right)$$

$$= (1+t)(1+s)\frac{s}{1+s} - (1+t)s\frac{t}{1+t} - t(1+s)\frac{s}{1+s} + st$$

$$= s$$

4

$$X = \int_0^1 B_t\,dt.$$

ar la formule d'intégration par parties, on a

$$X(\omega) = \int_0^1 B_t(\omega)\,dt = B_t(\omega)(t-1)\Big]_0^1 - \int_0^1 (t-1)\,dB_t(\omega)$$

$$= \int_0^1 (1-t)\,dB_t(\omega)$$

X est sous la formule d'une intégrale de Wiener.

$\Rightarrow$ X suit la loi normale d'espérance

$E(X) = 0$ et de variance $Var(X) = \int_0^1 (1-t)^2 dt = 1/3$

$X \sim N(0, 1/3)$.

4

Ex 4 : ① $Z_t = t^2 B_t - 2\int_0^t s\,dB_s$.

on applique la formule d'Itô au processus $t^2 B_t$ avec $f(t,x) = t^2 x$.

$$d(t^2 B_t) = d f(t, B_t) = 2t\,B_t\,dt + t^2\,dB_t.$$

$$\Rightarrow dZ_t = 2t\,B_t\,dt + t^2 dB_t - 2t\,dB_t$$

$$= 2t\,B_t\,dt + (t^2 - 2t)\,dB_t.$$

2

Z_t n'est pas une martingale.

$Z_t = B_t^2(B_t^2 - 6t) = X_t \cdot Y_t$

où $X_t = B_t^2$ et $Y_t = (B_t^2 - 6t)$.

$dZ_t = d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y dX_t + d\langle X, Y\rangle_t$.

pour $X_t = B_t^2$, $f(x) = x^2$

$\Rightarrow d(X_t) = d(B_t^2) = 2B_t dB_t + \cancel{\tfrac{1}{2}} \cdot \cancel{2}\, dt$

pour $Y_t = B_t^2 - 6t$, $g(t,x) = x^2 - 6t$.

$\Rightarrow dY_t = d(B_t^2 - 6t) = -6dt + 2B_t dB_t + \frac{1}{2} \cdot 2 \quad dt$

$= -5dt + 2B_t dB_t$.

2

$d\langle X, Y\rangle_t = 4B_t^2 dt$.

$\Rightarrow dZ_t = B_t^2(-5dt + 2B_t dB_t) + (B_t^2 - 6t)(dt + 2B_t dB_t)$

$+ 4B_t^2 dt$.

$= -5B_t^2 dt + 2B_t^3 dB_t + B_t^2 dt + 2B_t^3 dB_t - 6t dt$

$- 12t B_t dB_t + 4B_t^2 dt$.

$= (-5B_t^2 + B_t^2 - 6t + 4B_t^2) dt + (2B_t^3 + 2B_t^3 - 12t B_t) dB_t$

$= -6t dt + (4B_t^3 - 12t B_t) dB_t$.

$\Rightarrow Z$ n'est pas une martingale.

$X_t = B_t^2 - t$, $Y_t = e^{B_t - t/2}$

on a d'après la formule d'Ito

$$B_t^2 = 2\int_0^t B_s\,dB_s + t.$$

$$\Rightarrow X_t = 2\int_0^t B_s\,dB_s$$

$$\Rightarrow \langle X\rangle_t = \left\langle 2\int_0^{\cdot} B_s\,dB_s\right\rangle_t = 4\int_0^t B_s^2\,ds$$

On aussi d'après la formule d'Itô $\left(Y_t = f(t, B_t)\right)$

$$Y_t = 1 + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, B_s)\,ds \qquad \text{avec } f(t,x) = e^{x - t/2}$$

$$+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s)\,dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, B_s)\,ds$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\int_0^t Y_s\,ds + \int_0^t Y_s\,dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t Y_s\,ds$$

$$= 1 + \int_0^t Y_s\,dB_s.$$

M

$$\Rightarrow \langle Y\rangle_t = \int_0^t Y_s^2\,ds = \int_0^t e^{2B_s - s}\,ds$$

$$\text{et } \langle X, Y\rangle_t = 2\int_0^t B_s\, e^{B_s - s/2}\,ds.$$