Contrôle

Exercice-1 —— **(08pts)**

Soit $X_1, ..., X_n$ des variables indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, de densité

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x) \qquad si\ x \geq 0.$$

On pose $L_n = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$ et $U_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$.

1. Calculer la fonction de répartition de L_n, puis celle de U_n.
2. Quelle est la loi de $Y_n = n\lambda L_n$?
3. On pose $Z_n = \lambda U_n - \ln(n)$ Calculer la fonction de répartition F_n de Z_n, puis trouver la limite, notée $F(t)$, de $F_n(t)$ pour tout réel t quand n tend vers l'infini. La fonction F est-elle une fonction de répartition?
4. Trouver la limite de $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{Z_n}{\ln(n)}\right| \geq \varepsilon\right)$ pour tout $\varepsilon \in]0,1[$ quand n tend vers l'infini.

Exercice-2 —— **(06pts)**

Soit $p \in]0,1[$. Supposons que F est continue et qu'il existe une seule solution x_p à l'équation $F(x) = p$. Soit $(k(n); n \geq 1)$ une suite d'entières telle que $1 \leq k(n) \leq n$ et $\lim_{n\to\infty} \dfrac{k(n)}{n} = p$.

Montrer que: $\underset{n\to\infty}{Lim} X_{(k(n),n)}$ converge presque sûrement vers x_p.

Exercice-3 —— **(06pts)**

On considère la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour $\theta > 0$ et $\lambda > 0$ par:

$$F(x) = \left(1 - (1 + x^{\theta})^{-\lambda}\right) \mathbb{I}_{\{x>0\}}.$$

1. Montrer que $F(.)$ est une fonction de répartition et donner son point terminal.
2. Montrer que $F(.)$ appartient au domaine d'attraction de *Fréchet* et donner, en fonction de θ et λ , l'indice des valeurs extrêmes γ associé.
3. On pose $L : [0,\infty[\to [0,\infty[$ la fonction définie par:

   $$L(x) = x^{-1/\gamma}(1 - F(x))$$

   et $\Delta : [0,\infty[\to [0,\infty[$ la fonction définie par $\Delta(x) = \dfrac{xL'(x)}{L(x)}$ pour tout $x > 0$ où $L'(.)$ désigne la dérivée de la fonction $L(.)$. Montrer que $\Delta(.)$ est une fonction à variations régulières dont vous préciserez l'indice.