جامعة بغداد

University of Baghdad

كلية التربية للعلوم الصرفة (ابن الهيثم)

College of Education for Pure Science (Ibn AlHaitham)

قسم الفيزياء

Department of Physics

المرحلة : الاولى

Stage : 1st.

محاضرات مادة : الميكانيك الكلاسيكي

Lectures of : Classical Mechanics

العام الدراسي : 2019 - 2020

(القياسات Measurement)

لوصف الظواهر الطبيعية، يجب علينا إجراء قياسات لمختلف جوانبها. ان كل قياس يرتبط بكمية فيزيائية، مثل طول الجسم. ويتم التعبير عن قوانين الفيزياء كعلاقات رياضية بين الكميات الفيزيائية.

في العام 1960، أنشأت لجنة دولية مجموعة من المعايير **للكميات الأساسية Fundamental quantities** للعلوم. يطلق عليها **SI** (النظام العالمي للوحدات)، وان الوحدات الأساسية للطول والكتلة والزمن هي المتر m والكيلوغرام kg والثانية s على التوالي. وهناك معايير أخرى للخواص الفيزيائية في نظام الوحدات الأساسية SI وضعتها اللجنة مثل تلك الخاصة بدرجة الحرارة (كلفن)، التيار الكهربائي (الأمبير)، وشدة الضياء (الشمعة)، وكمية المادة او عدد الجسيمات (المول).

في الميكانيك، **الكميات الأساسية هي الطول Length والكتلة Mass والزمن Time**. ويمكن التعبير عن جميع الكميات الأخرى (الكميات المشتقة) في الميكانيك بحدود هذه الكميات الأساسية.

اما المتغيرات الأخرى فمعظمها تكون **كميات مشتقة Derived quantities**، تلك التي يمكن التعبير عنها على أنها مزيج رياضي من الكميات الأساسية. ومن الأمثلة الشائعة عن الكميات المشتقة **المساحة Area** (وهي حاصل ضرب طولين) و**الانطلاق speed** (نسبة الطول إلى الفاصلة الزمنية).

ومن الأمثلة الأخرى على كمية مشتقة مثل **الكثافة density** : حيث يتم تعريف الكثافة لأي مادة، ويرمز لها بالحرف اليوناني ρ ويقرأ rho ، على أنها الكتلة m لكل وحدة حجم V :

$$\rho = \frac{m}{V}$$

(الحركة في بعد واحد Motion in One Dimension)

الحركة هي احدى أكثر الظواهر الفيزيائية وضوحا، ولذلك فأنها تمثل بداية ممتازة لدراسة الفيزياء. ولكن قبل ذلك علينا ان نفهم كيفية وصفها بشكل كمي. وهذا الوصف الكمي للحركة لن يكون مقنعا الا بعد تعريف بعض خواصها الأساسية مثل الازاحة والسرعة والتعجيل بدلالة ابعاد الطول والزمن.

2.1 الموضع Position والسرعة Velocity والانطلاق Speed

- ان **موضع** الجسيم (x) هو (موقع الجسيم بالنسبة الى نقطة مرجعية مختارة يمكننا اعتبارها مركز نظام الإحداثيات).
- يتم تعريف الإزاحة Displacement (Δx) لجسيم على أنها (التغير في موضع الجسيم خلال فترة زمنية معينة). حيث عندما ينتقل الجسيم من موضع أولي (x_i) إلى موضع نهائي (x_f) ، تكون ازاحته معطاة بالمعادلة:

$$\Delta x = x_f - x_i \qquad (2.1)$$

نستخدم الحرف دلتا delta اليوناني (Δ) للدلالة على التغيير في الكمية.

- من هذا التعريف، نرى أن (Δx) تكون موجبة إذا كان الموضع النهائي (x_f) أكبر من الموضع الاولي (x_i) و تكون سالبة إذا كانت (x_f) أقل من (x_i).

من المهم جدا معرفة الفرق بين الازاحة والمسافة المقطوعة.

- المسافة Distance (هي طول المسار الذي يتبعه الجسيم).
- يتم تمثيل المسافة دائما برقم موجب، في حين يمكن أن تكون الازاحة موجبة أو سالبة.
- ان الإزاحة هي مثال لكمية متجه Vector. وان العديد من الكميات الفيزيائية الأخرى، بما في ذلك الموضع والسرعة والتعجيل Acceleration، هي أيضا كميات متجه.
- بشكل عام، تتطلب الكمية المتجه Vector quantity تحديد كل من الاتجاه والقيمة. اما الكمية العددية Scalar quantity فلها قيمة عددية وليس لها اتجاه.

- تعرف **متوسط السرعة** Average velocity $(v_{x,\mathrm{av}})$ للجسيم بأنها (إزاحة الجسيم (Δx) مقسوما على الفاصلة الزمنية (Δt) الذي تحدث فيها هذه الإزاحة):

$$v_{x,\mathrm{av}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (2.2)$$

حيث يشير الحرف (x) إلى الحركة على امتداد (المحور السيني x).

من هذا التعريف، نرى أن متوسط السرعة لها أبعاد طول length مقسومة على الزمن time، أو متر على الثانية $(\mathrm{m/s})$ بوحدات النظام الوحدات العالمي SI.

- يمكن أن تكون متوسط سرعة الجسيم المتحرك في بعد واحد موجبة أو سالبة، اعتمادا على اشارة الإزاحة.
- وتكون الفاصلة الزمنية (Δt) موجبة دائما.

إذا كانت سرعة الجسيم ثابتة، فإن سرعته الآنية في أي لحظة خلال فاصلة زمنية هي نفس متوسط السرعة خلال هذه الفاصلة. وهذا يعني ان $v_x = v_{x,\mathrm{av}}$

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

بتذكر أن $\Delta x = x_f - x_i$

يكون

$$v_x = \frac{x_f - x_i}{\Delta t}$$

أو ان

$$x_f = x_i + v_x \Delta t$$

عمليا، نختار في العادة ان يكون الزمن في بداية الفاصلة الزمنية مساويا الى الصفر $t_i = 0$ والزمن في نهاية هذه الفاصلة الزمنية $t_f = t$ ، لذلك تصبح المعادلة عندما تكون السرعة v_x ثابتة:

$$x_f = x_i + v_x t \qquad (2.3)$$

- يعرف **متوسط الانطلاق Average speed** (v_{av}) للجسيم، وهو كمية عددية، بأنه (المسافة الكلية (d) مقسومة على الفاصلة الزمنية الكلية اللازمة لقطع تلك المسافة):

$$v_{\text{av}} = \frac{d}{\Delta t} \qquad (2.4)$$

ان وحدة النظام SI لمتوسط الانطلاق هي نفس وحدة السرعة المتوسطة: (متر على الثانية) (m/s).

- ليس لمتوسط الانطلاق اتجاه ويتم التعبير عنه دائما كرقم موجب.

2.2 السرعة الآنية Instantaneous Velocity والانطلاق

السرعة الآنية (v_x) تساوي قيمة غاية النسبة $(\Delta x/\Delta t)$ عندما تقترب (Δt) من الصفر:

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (2.5)$$

في موضوع التفاضل والتكامل، يسمى هذا الحد مشتقة (x) بالنسبة الى (t) ، وتكتب (dx/dx): لذلك تكون السرعة الآنية

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad (2.6)$$

يمكن أن تكون اشارة السرعة الآنية موجبة أو سالبة أو صفر.

يعرف الانطلاق الآني للجسيم بأنه (قيمة سرعته الآنية). كما هو الحال مع متوسط الانطلاق، فإن الانطلاق الآني ليس له اتجاه يرتبط به.

مثال (2.1): يتحرك جسيم على امتداد (المحور- x). حيث يتغير موقعه مع الزمن وفقا للمعادلة: $(x = -4t + 2t^2)$، وان (x) تقاس بالأمتار و (t) تقاس في الثواني.

(A) احسب إزاحة الجسيم في الفواصل الزمنية $(t = 0)$ إلى $(t = 1\text{ s})$ و $(t = 1\text{ s})$ إلى $(t = 3\text{ s})$.

(B) احسب متوسط السرعة خلال هذه الفاصلتان الزمنيتان.

(C) أوجد السرعة الآنية للجسيم عند $(t = 2.5\text{ s})$.

الحل:

(A): في الفاصلة الزمنية الأولى، $(t = 0)$ إلى $(t = 1\text{ s})$:

$$\Delta x = x_f - x_i = [-4(1) + 2(1)^2] - [-4(0) + 2(0)^2] = -2\text{ m}$$

اما في الفاصلة الزمنية الثانية، $(t = 1\ \mathrm{s})$ إلى $(t = 3\ \mathrm{s})$:

$$\Delta x = x_f - x_i = [-4(3) + 2(3)^2] - [-4(1) + 2(1)^2] = +8\ \mathrm{m}$$

(B): في الفاصلة الزمنية الأولى، استخدم المعادلة $(v_{x,\mathrm{av}} = \frac{\Delta x}{\Delta t})$ مع $\Delta t = t_f - t_i = 1\ \mathrm{s}$:

$$v_{x,\mathrm{av}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-2\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{s}} = -2\ \mathrm{m/s}$$

وفي الفاصلة الزمنية الثانية، $\Delta t = t_f - t_i = 3 - 1 = 2\ \mathrm{s}$:

$$v_{x,\mathrm{av}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{+8\ \mathrm{m}}{2\ \mathrm{s}} = +4\ \mathrm{m/s}$$

(C): السرعة الآنية تعطى بالمعادلة $v_x = \frac{dx}{dt}$ حيث ان معادلة الموقع $(x = -4t + 2t^2)$ فيكون

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(-4t + 2t^2) = -4 + 4t$$

وعند زمن $t = 2.5\ \mathrm{s}$ تكون السرعة الآنية

$$v_x = 4 + 4t = -4 + 4(2.5) = +6\ \mathrm{m/s}$$

2.3 التعجيل

- عندما تتغير سرعة الجسيم مع مرور الزمن، يقال عن الجسيم بان له تعجيل.
- يعرف **متوسط التعجيل** للجسيم $(a_{x,\mathrm{av}})$ بانه (التغير في السرعة (Δv_x) مقسوما على الفاصلة الزمنية (Δt) التي يحدث خلالها هذا التغيير): ويعطى متوسط التعجيل بالعلاقة

$$a_{x,\mathrm{av}} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{fx} - v_{ix}}{t_f - t_i} \qquad (2.7)$$

ان وحدة التعجيل هي المتر على مربع الثانية $(\mathrm{m/s^2})$.

- يساوي التعجيل الآني مشتقة السرعة بالنسبة الى الزمن: ويعطى بالعلاقة

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \qquad (2.8)$$

- في حالة الحركة في خط مستقيم، يرتبط اتجاه سرعة الجسم واتجاه تعجيله كما يلي: عندما تكون سرعة الجسيم وتعجيله في نفس الاتجاه، فإن الجسيم يتعجل بتعجيل تزايدي. ومن ناحية أخرى، عندما تكون سرعة الجسيم والتعجيل في اتجاهين متعاكسين، فإن الجسيم يتعجل بتعجيل تباطؤ.
- لكون ان $v_x = \frac{dx}{dt}$، فانه يمكن أيضا كتابة التعجيل على النحو الاتي:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad (2.9)$$

وهذا يعني، انه في الحركة في بعد واحد، يساوي التعجيل، المشتقة الثانية لـ (x) بالنسبة للزمن.

مثال (2.2): تتغير سرعة الجسيم المتحرك على طول (المحور- x) وفقا للمعادلة $(v_x = 40 - 5t^2)$، حيث تكون v_x بوحدات المتر على الثانية (m/s) و (t) بالثانية (s).

(A) أوجد متوسط التعجيل في الفاصلة الزمنية ($t = 0$ إلى $t = 2$ s).

(B) احسب التعجيل عند $t = 2$ s.

الحل:

(A)

$$v_{x1} = 40 - 5t^2 = 40 - 5(0)^2 = 40\,\text{m/s}$$

$$v_{x2} = 40 - 5t^2 = 40 - 5(2)^2 = 20\,\text{m/s}$$

$$a_{x,\text{av}} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i} = \frac{20 - 40}{2 - 0} = -10\ \text{m/s}^2$$

تشير العلامة السالبة إلى أن الجسيم يخضع لتعجيل تباطؤ.

(B)

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(40 - 5t^2) = -10t = -10(2) = -20\ \text{m/s}^2$$

2.4 الجسيمات تحت تأثير تعجيل ثابت Particles under Constant Acceleration

إذا تغير تعجيل الجسيم مع الزمن، تكون حركته معقدة ويصعب تحليلها. ولكن هناك نوعا شائعا وبسيطا للحركة الأحادية البعد one-dimensional motion، وهي ان يكون التعجيل فيها ثابتا constant. في هذه الحالة:

- ❖ يكون متوسط التعجيل $(a_{x,\mathrm{av}})$ خلال أي فترة زمنية مساويا عدديا للتعجيل الآني (a_x) في أي لحظة خلال الفاصلة الزمنية،
- ❖ وتتغير السرعة بنفس المعدل الزمني طوال الحركة.

وفي هذه الحالة يؤخذ بنظر الاعتبار ان **الجسيمات تكون تحت تعجيل ثابت**.

إذا استبدلنا $(a_{x,\mathrm{av}})$ بـ (a_x) في المعادلة $(a_{x,\mathrm{av}} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{fx}-v_{ix}}{t_f-t_i})$ وأخذنا الزمن $t_i = 0$ و (t_f) في أي زمن لاحق (t) ، نجد أن:

$$a_x = \frac{v_{fx} - v_{ix}}{t - 0}$$

فيكون لتعجيل a_x ثابت

$$v_{fx} = v_{ix} + a_x t \qquad (2.10)$$

ويمكننا التعبير عن متوسط السرعة في أي فاصلة زمنية لتعجيل ثابت a_x بالعلاقة

$$a_{x,\mathrm{av}} = \frac{v_{fx} + v_{ix}}{2} \qquad (2.11)$$

لاحظ أن هذه المعادلة لمتوسط السرعة تنطبق فقط في الحالات التي يكون فيها التعجيل ثابتا.

الآن يمكننا استخدام المعادلات $\left(\Delta x = x_f - x_i\right)$ و $\left(v_{x,\mathrm{av}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\right)$ للحصول على موضع الجسيم كدالة للزمن كما يلي:

$$v_{x,\mathrm{av}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{x_f - x_i}{t - 0} = \frac{x_f - x_i}{t}$$

$$\therefore x_f - x_i = v_{x,\mathrm{av}} t$$

وحيث ان $\left(a_{x,\mathrm{av}} = \frac{v_{fx}+v_{ix}}{2}\right)$ يكون

$$x_f - x_i = \left(\frac{v_{fx} + v_{ix}}{2}\right) t$$

فيكون لتعجيل a_x ثابت

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_{ix} + v_{fx})t \qquad (2.12)$$

تعطي هذه المعادلة الموضع النهائي للجسيم عند الزمن (t) بحدود السرع الأولية والنهائية .

يمكننا الحصول على معادلة مفيدة اخرى لموضع الجسيم تحت تعجيل ثابت a_x بتعويض v_{xf} من المعادلة $(v_{fx} = v_{ix} + a_x t)$ في المعادلة الاخيرة $x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_{ix} + v_{fx})t$ كما يلي:

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_{xi} + v_{xi} + a_x t)t$$

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}(2v_{ix} + a_x t)t$$

$$x_f = x_i + v_{ix}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \qquad (2.13)$$

تعطي هذه المعادلة الموضع النهائي للجسيم في الزمن (t) بحدود الموضع الأولي x_i والسرعة الأولية v_{ix} والتعجيل الثابت a_x.

أخيرا، يمكننا الحصول على معادلة للسرعة النهائية v_{fx} التي لا تحتوي على الزمن كمتغير ولتعجيل الثابت a_x عن طريق تعويض قيمة (t) من المعادلة $(v_{fx} = v_{ix} + a_x t)$

$$v_{fx} = v_{ix} + a_x t$$

$$\therefore t = \frac{v_{fx} - v_{ix}}{a_x}$$

في المعادلة $x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_{ix} + v_{fx})t$

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_{ix} + v_{fx})\left(\frac{v_{fx} - v_{ix}}{a_x}\right)$$

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(\frac{v_{fx}^2 - v_{ix}^2}{a_x}\right)$$

$$x_f - x_i = \frac{1}{2}\left(\frac{v_{fx}^2 - v_{ix}^2}{a_x}\right)$$

$$2a_x(x_f - x_i) = v_{fx}^2 - v_{ix}^2$$

$$\therefore v_{fx}^2 = v_{ix}^2 + 2a_x(x_f - x_i) \qquad (2.14)$$

تعطي هذه المعادلة السرعة النهائية v_{fx} بحدود السرعة الأولية v_{ix}، وتعجيل ثابت a_x، وموضع الجسيم $(x_f - x_i)$.

عندما يكون تعجيل الجسيم صفرا، تكون سرعته ثابتة ويتغير موضعه بشكل خطي مع مرور الزمن.

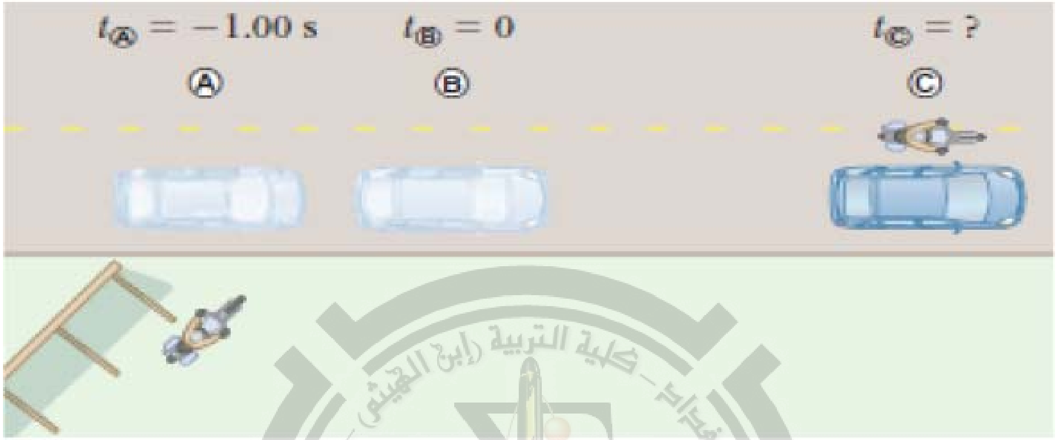
تسمى المعادلات (2.10) و (2.12) و (2.13) و (2.14) **بالمعادلات الحركية** Kinematic Equations لحركة الجسيمات تحت تعجيل ثابت a_x. هذه المعادلات مدرجة في الجدول أدناه:

المعادلة	المعلومات المقدمة من المعادلة
$v_{fx} = v_{ix} + a_x t$	السرعة كدالة للزمن
$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_{ix} + v_{fx})t$	الموضع كدالة للسرعة والزمن
$x_f = x_i + v_{ix}t + \frac{1}{2}a_x t^2$	الموضع كدالة للزمن
$v_{fx}^2 = v_{ix}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$	السرعة كدالة الموضع

مثال (2.3): تسير سيارة بانطلاق ثابت $(45\ \mathrm{m/s})$ بجوار شرطي مرور يملك دراجة نارية مختبئ خلف لوحة إعلانات. بعد مرور السيارة المسرعة بثانية واحدة من لوحة الإعلانات؛ انطلق شرطي المرور بتعجيل ثابت $(3\ \mathrm{m/s^2})$ من موضع لوحة الإعلانات للقبض على سائق السيارة المخالف للتعليمات، ما هي المدة المستغرقة ليلتحق بها شرطي المرور بالسيارة؟

الحل:

أولا، نكتب معادلات الموضع لكل من السيارة والدراجة النارية كدالة للزمن. من الملائم اختيار موضع لوحة الإعلانات كنقطة الأصل ووضع الزمن في النقطة B مساويا الى الصفر $(t_{\mathrm{B}} = 0)$ في الوقت الذي يبدأ فيه شرطي المرور حركته على الدراجة. ففي تلك اللحظة، تكون السيارة قد قطعت بالفعل مسافة $(45\ \mathrm{m})$ من لوحة الإعلانات لأنها تسير بانطلاق ثابت يبلغ $45\ \mathrm{m/s}$ بمدة ثانية واحدة. لذلك، فإن الموضع الأولي للسيارة x_{B} المسرعة يساوي $(45\ \mathrm{m})$.



بتطبيق المعادلة $(x_f = x_i + v_x t)$ لإيجاد موضع السيارة عند أي زمن (t) كما يلي:

$$x_f = x_i + v_x t \quad \rightarrow \quad x_{\mathrm{car}} = x_{\mathrm{B}} + v_{x,\mathrm{car}} t$$

عند الزمن $(t = 0)$، تعطي هذه المعادلة الموضع الاولي الصحيح للسيارة عندما يبدأ شرطي المرور الحركة:

$$x_{\mathrm{car}} = x_{\mathrm{B}} + v_{x,\mathrm{car}} t \quad \rightarrow \quad x_{\mathrm{car}} = 45\ \mathrm{m} + v_{x,\mathrm{car}}(0) = 45\ \mathrm{m}$$

يبدأ الشرطي حركته من السكون عند الزمن $(t_{\mathrm{B}} = 0)$ بتعجيل ثابت $(3\ \mathrm{m/s^2})$ بعيدا عن نقطة الأصل. لذلك نستخدم المعادلة $(x_f = x_i + v_{xi} t + \frac{1}{2} a_x t^2)$ لإيجاد موضعه عند أي زمن (t) كما يلي:

$$x_f = x_i + v_{ix} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \quad \rightarrow \quad x_{\mathrm{trooper}} = x_{\mathrm{B}} + v_{0,\mathrm{trooper}} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$x_{\mathrm{trooper}} = 0 + (0)t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$x_{\mathrm{trooper}} = \frac{1}{2} a_x t^2$$

بمساواة مواضع السيارة والشرطي لتمثيل التحاق الشرطي بالسيارة عند الموضع C يكون لدينا

$$x_{\mathrm{trooper}} = x_{\mathrm{car}}$$

$$\frac{1}{2}a_x t^2 = x_{\mathrm{B}} + v_{x,\mathrm{car}} t$$

$$\frac{1}{2}a_x t^2 - v_{x,\mathrm{car}} t - x_{\mathrm{B}} = 0$$

$$\frac{1}{2}(3)t^2 - (45)t - 45 = 0 \quad \rightarrow \ 1.5t^2 - 45t - 45 = 0$$

$$t^2 - 30t - 30 = 0$$

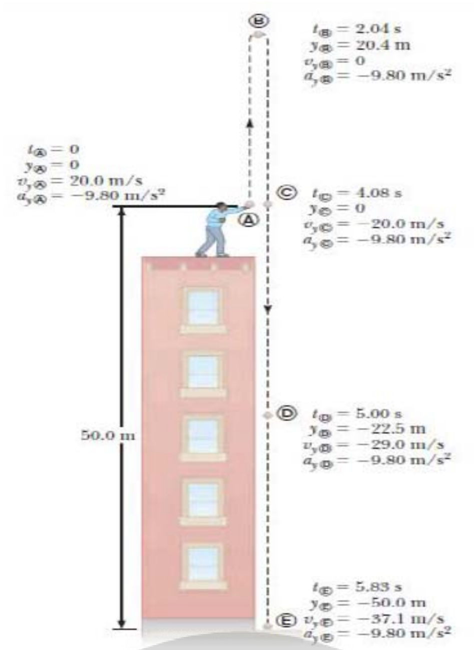
$$t = 31 \ \mathrm{m}$$

2.5 الأجسام الساقطة بشكل حر Freely Falling Objects

الجسم الساقط سقوطا حرا هو (أي جسم يتحرك بحرية تحت تأثير الجاذبية gravity فقط، بغض النظر عن حركته الأولية).

- يشار إلى مقدار تعجيل السقوط الحر بالرمز (g). ان قيمة (g) تتناقص مع زيادة الارتفاع فوق مستوى سطح الأرض. علاوة على ذلك، تحدث اختلافات طفيفة في (g) مع حدوث تغييرات في خط العرض للأرض. وبشكل عام عند مستوى سطح الأرض، تساوي قيمة (g) حوالي $9.80 \ \mathrm{m/s^2}$.
- لاحظ أن الحركة تكون بالاتجاه العمودي (الاتجاه المحور y) بدلا من الاتجاه الأفقي على محور (x)
- نختار ان تكون قيمة $(g = -9.80 \ \mathrm{m}/s^2)$ ، حيث تعني الإشارة السالبة أن تعجيل السقوط الحر للجسم يكون للأسفل.

مثال (2.4): قذف حجر من سطح بناية الى الأعلى بسرعة ابتدائية مقدارها $(20 \ \mathrm{m/s})$ و وصل لارتفاع $(50 \ \mathrm{m})$ فوق مستوى سطح الأرض، لكن عند عودته إلى الأسفل لم يصطدم حافة سقف البناية كما هو موضح في الشكل أدناه.



(A) باستخدام $t_A = 0$ للزمن الذي يترك فيه حجر يد الرامي في الموضع A. احسب الزمن الذي يصل فيه الحجر إلى أقصى ارتفاع له فوق سطح البناية؟

الحل: نستخدم المعادلة $(v_{fx} = v_{ix} + a_x t)$ لحساب الزمن الذي يصل فيه الحجر إلى أقصى ارتفاع B، حيث يستبدل الحرف x بالحرف y دلالة على ان الحركة على المحور الشاقولي

$$v_{fy} = v_{iy} + a_y t \;\rightarrow\; t_B = \frac{v_{fy} - v_{iy}}{a_y}$$

دائما نعوض عن قيمة التعجيل الأرضي بالإشارة السالبة كون ان اتجاهه دائما نحو الأسفل فيكون

$$t_B = \frac{0 - 20}{-9.80} = 2.04 \text{ s}$$

(B) جد أقصى ارتفاع يصل اليه الحجر؟

الحل: كما في الفرع (A)، نختار النقاط الأولية والنهائية عند بداية ونهاية الرحلة الى الاعلى. بجعل $(y_A = 0)$ وتعويض الزمن المحسوب من الفرع (A) في المعادلة $(x_f = x_i + v_{ix} t + \frac{1}{2} a_x t^2)$ لإيجاد أقصى ارتفاع مع ملاحظة استبدال الحرف x بالحرف y لكون ان الحركة شاقوليه. وبذلك سيكون الاستبدال أيضا لـ x_f لتكون y_{max} التي هي نفسها y_B لكون النقطة B اقصى ارتفاع يصل اليه الحجر،

واستبدال x_i بـ y_{A} وهو الموضع الذي قذف منه الحجر من النقطة A ، واستبدال السرعة v_{xi} لتكون $v_{y\mathrm{A}}$، وأخيرا استبدال التعجيل a_x ليكون a_y :

$$x_f = x_i + v_{ix}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad \rightarrow \quad y_{\max} = y_{\mathrm{B}} = y_{\mathrm{A}} + v_{y\mathrm{A}}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

$$y_{\max} = 0 + (20)(2.04) + \frac{1}{2}(-9.80)(2.04)^2 = 20.4 \text{ m}$$

(C) حدد سرعة الحجر عندما يعود إلى الارتفاع الذي ألقي منه؟

اختر النقطة الأولية التي قذف منها الحجر (A) والنقطة الأخيرة التي سيمر عليها (C) نزولا. لاحظ ان النقطتان (A) و (C) تقعان على نفس الارتفاع من مستوى سطح الأرض.

نعوض عن القيم المعلومة في المعادلة $v_{fx}^2 = v_{ix}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$: بأخذ بنظر الاعتبار الاستبدالات في هذه الحالة تكون:

$$v_{fx}^2 = v_{ix}^2 + 2a_x(x_f - x_i) \quad \rightarrow \quad v_{y\mathrm{C}}^2 = v_{y\mathrm{A}}^2 + 2a_y(y_{\mathrm{C}} - y_{\mathrm{A}})$$

$$v_{y\mathrm{C}}^2 = (20)^2 + 2(-9.80)(0-0) = 400 \ \text{m}^2/\text{s}^2$$

$$\therefore \ v_{y\mathrm{C}} = -20 \ \text{m/s}$$

عند أخذ الجذر التربيعي للمعادلة اعلاه، يمكننا اختيار قيمة الجذر الموجب أو السالب. وقد اخترنا الجذر السالب لأننا نعلم أن الحجر يتجه لأسفل عند النقطة C. وبذلك نجد ان سرعة الحجر عند وصوله إلى ارتفاعه الأصلي مساوية بالمقدار لسرعته الابتدائية التي قذف بها، ولكنها في الاتجاه المعاكس.

(D) أوجد سرعة وموضع الحجر عند الزمن $t = 5$ s ؟

الحل: نختار النقطة الابتدائية بالضبط بعد رمي الحجر والنقطة الأخيرة بعد مرور ($t = 5$ s).

نحسب السرعة عند النقطة (D) من المعادلة ($v_{fx} = v_{ix} + a_x t$):

$$v_{fx} = v_{ix} + a_x t \quad \rightarrow \quad v_{y\mathrm{D}} = v_{y\mathrm{A}} + a_y t$$

$$v_{y\mathrm{D}} = 20 + (-9.80)(5) = -29 \ \text{m/s}$$

نستخدم المعادلة ($x_f = x_i + v_{ix}t + \frac{1}{2}a_x t^2$) لإيجاد موضع الحجر بعد مرور ($t = 5$ s).

$$x_f = x_i + v_{ix}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad \rightarrow \quad y_{\mathrm{D}} = y_{\mathrm{A}} + v_{y\mathrm{A}}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

$$y_{\mathrm{D}} = 0 + (20)(5) + \frac{1}{2}(-9.80)(5)^2 = -22.5\ \mathrm{m}$$

Chapter 1

(Measurements)

To describe natural phenomena, we must make measurements of various aspects of nature. Each measurement is associated with a physical quantity, such as the length of an object. The laws of physics are expressed as mathematical relationships among physical quantities.

In 1960, an international committee established a set of standards for the **fundamental quantities** of science. It is called the **SI** (System International), and its fundamental units of length, mass, and time are the *meter*, *kilogram*, and *second*, respectively. Other standards for SI fundamental units established by the committee are those for temperature (*kelvin*), electric current (*ampere*), luminous intensity (*candela*), and the amount of substance (*mole*).

In mechanics, **the fundamental quantities are length, mass, and time.** All other quantities in mechanics can be expressed in terms of these three.

Most other variables are **derived quantities**, those that can be expressed as a mathematical combination of fundamental quantities. Common examples are **area** (a product of two lengths) and **speed** (a ratio of a length to a time interval). Another example of a derived quantity is **density.**

The density ρ (Greek letter rho) of any substance is defined as its *mass per unit volume:*

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Chapter 2

(Motion in One Dimension)

2.1 Position, Velocity, and Speed

- A particle's **position** (x) is (The location of the particle with respect to a chosen reference point that we can consider to be the origin of a coordinate system).
- The **displacement** (Δx) of a particle is defined as (its change in position in some time interval). As the particle moves from an initial position (x_i) to a final position (x_f), its displacement is given by:

$$\Delta x = x_f - x_i \qquad \text{Displacement} \qquad (2.1)$$

We use the capital Greek letter delta (Δ) to denote the *change* in a quantity.

- From this definition, we see that (Δx) is positive if (x_f) is greater than (x_i) and negative if (x_f) is less than (x_i).

It is very important to recognize the difference between displacement and distance traveled.

- **Distance** (is the length of a path followed by a particle).
- Distance is always represented as a positive number, whereas displacement can be either positive or negative.
- Displacement is an example of a vector quantity. Many other physical quantities, including position, velocity, and acceleration, also are vectors.
- In general, a **vector quantity** requires the specification of both direction and magnitude. **Scalar quantity** has a numerical value and no direction.

- The **average velocity** ($v_{x,\text{avg}}$) of a particle is defined as (the particle's displacement (Δx) divided by the time interval (Δt) during which that displacement occurs):

$$v_{x,\text{avg}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (2.2)$$

Where, the subscript (x) indicates motion along the (x-axis).

From this definition we see that average velocity has dimensions of length divided by time, or meters per second (m/s) in SI units.

- The average velocity of a particle moving in one dimension can be positive or negative, depending on the sign of the displacement.
- The time interval (Δt) is always positive.

If the velocity of a particle is constant, its instantaneous velocity at any instant during a time interval is the same as the average velocity over the interval. That is, $v_x = v_{x,\text{avg}}$.

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Remembering that $\Delta x = x_f - x_i$, we see that $v_x = (x_f - x_i)/\Delta t$, or

$$x_f = x_i + v_x \Delta t$$

In practice, we usually choose the time at the beginning of the interval to be $t_i = 0$ and the time at the end of the interval to be $t_f = t$, so our equation becomes: $\boxed{x_f = x_i + v_x t}$ (for constant v_x) (2.3)

- The **average speed** (v_{avg}) of a particle, a scalar quantity, is defined as (the total distance (d) traveled divided by the total time interval required to travel that distance):

$$v_{\text{avg}} = \frac{d}{\Delta t} \qquad \text{(Average speed)} \qquad (2.4)$$

The SI unit of average speed is the same as the unit of average velocity: (meters per second)(m/s).

- Average speed has no direction and is always expressed as a positive number.

2.2 Instantaneous Velocity and Speed

- The **instantaneous velocity** (v_x) equals the limiting value of the ratio ($\Delta x/\Delta t$) as (Δt) approaches zero:

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (2.5)$$

In calculus notation, this limit is called the *derivative* of (x) with respect to (t), written (dx/dt):

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad \text{(instantaneous velocity)} \qquad (2.6)$$

The instantaneous velocity can be positive, negative, or zero.

- The **instantaneous speed** of a particle is defined as (the magnitude of its instantaneous velocity). As with average speed, instantaneous speed has no direction associated with it.

Example (2.1):

A particle moves along the (x – axis). Its position varies with time according to the expression: ($x = - 4t + 2t^2$), where (x) is in meters and (t) in seconds.

(A) Determine the displacement of the particle in the time intervals (t = 0) to (t =1 s) and (t = 1 s) to (t =3 s).

(B) Calculate the average velocity during these two time intervals.

(C) Find the instantaneous velocity of the particle at (t = 2.5 s).

<u>Solution:</u>

(A): In the first time interval, (t = 0) to (t =1 s):

$$\Delta x = x_f - x_i$$

$$\Delta x = [- 4 (1) + 2 (1)^2] – [- 4 (0) + 2 (0)^2] = - 2 \text{ m.}$$

For the second time interval (t = 1 s) to (t =3 s):

$$\Delta x = [- 4 (3) + 2 (3)^2] – [- 4 (1) + 2 (1)^2] = + 8 \text{ m.}$$

(B): In the first time interval, use equation (2.2) with $\Delta t = t_f - t_i = 1$ s:

$$v_{x,avg} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-2m}{1\,s} = -2\ m/s$$

In the second time interval, $\Delta t = t_f - t_i = 2$ s:

$$v_{x,avg} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{8m}{2s} = +\,4\ m/s$$

(C): Instantaneous velocity $\quad v_x = \frac{dx}{dt}$, $x = -\,4t + 2t^2$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\,4 + 4\,t\text{ , at } t = 2.5\text{ s :}$$

$$v_x = -\,4 + 4\,(2.5) = +\,6\ m/s$$

2.3 Acceleration

- When the velocity of a particle changes with time, the particle is said to be *accelerating*.
- The **average acceleration** ($a_{x,avg}$) of the particle is defined as (The *change* in velocity (Δv_x) divided by the time interval (Δt) during which that change occurs):

$$a_{x,avg} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i} \qquad \text{Average acceleration} \qquad (2.7)$$

The unit of acceleration is meters per second squared (m/s^2).

- The instantaneous acceleration equals the derivative of the velocity with respect to time:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \qquad \text{Instantaneous acceleration} \qquad (2.8)$$

- For the case of motion in a straight line, the direction of the velocity of an object and the direction of its acceleration are related as follows: When the object's velocity and acceleration are in the same direction, the object is **speeding up**. On the other hand, when the object's velocity and acceleration are in opposite directions, the object is **slowing down**.
- Because $v_x = \frac{dx}{dt}$, the acceleration can also be written as:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad (2.9)$$

That is, in one-dimensional motion, the acceleration equals the *second derivative* of (x) with respect to time.

Example (2.2):

The velocity of a particle moving along the (x- axis) varies according to the expression ($v_x = 40 - 5t^2$), where v_x is in meters per second and (t) in seconds.

(A) Find the average acceleration in the time interval ($t = 0$ to $t = 2$ s).

(B) Determine the acceleration at $t = 2$ s.

Solution:

(A) $v_{x1} = 40 - 5t^2 = 40 - 5\,(0)^2 = 40$ m/s

$v_{x2} = 40 - 5t^2 = 40 - 5\,(2)^2 = 20$ m/s

$$a_{x,\text{avg}} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{20-40}{2-0} = -10 \text{ m/s}^2$$

The negative sign indicates that the particle is slowing down.

(B) $a_x = \frac{dv_x}{dt}$, $v_x = 40 - 5t^2$

$a_x = -10\,t = -10\,(2) = -20$ m/s^2

2.4 Particles under Constant Acceleration

If the acceleration of a particle varies in time, its motion can be complex and difficult to analyze. A very common and simple type of one-dimensional motion, however, is that in which the acceleration is constant. In such case, the average acceleration ($a_{x,\text{avg}}$) over any time interval is numerically equal to the instantaneous acceleration (a_x) at any instant within the interval, and the velocity changes at the same rate throughout the motion. This situation is considered to be the **particle under constant acceleration**.

If we replace ($a_{x,\text{avg}}$) by (a_x) in equation (2.7) and take $t_i = 0$ and (t_f) to be any later time (t), we find that:

(المتجهات Vectors)

3.1 الكميات المتجه والعددية Vectors and Scalar Quantities

- تحدد **الكمية العددية Scalar Quantity** بالكامل بقيمة منفردة مع وحدة مناسبة ولا يكون لها اتجاه.

والأمثلة على الكميات العددية هي درجة الحرارة، والحجم، والكتلة، والانطلاق، والزمن.

- تحدد **الكمية المتجه Vector Quantity** بالكامل برقم مع وحدة مناسبة بالإضافة إلى اتجاه.

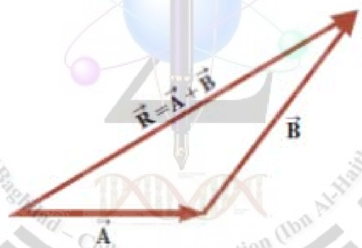
ومن الأمثلة على الكمية المتجه هي الازاحة والسرعة.

3.2 بعض خصائص المتجهات Some Properties of Vectors

جمع المتجهات Adding Vectors

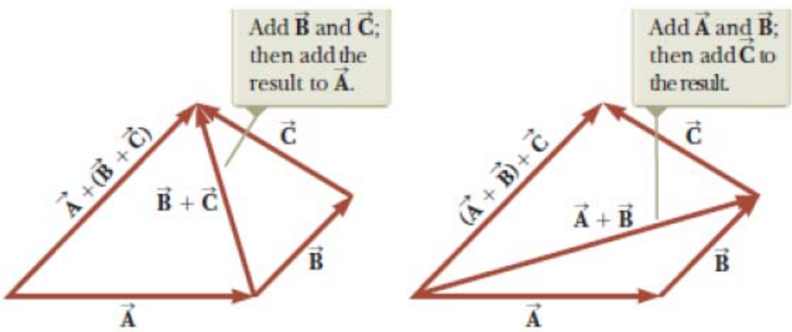
عند جمع المتجهين (المتجه $\vec{A}$ و المتجه $\vec{B}$) يكون مجموع الجمع مستقلا عن ترتيب مكان المتجهات بالنسبة لإشارة الجمع. تُعرف هذه الخاصية باسم **(قانون التبادل Commutative لعملية الجمع)**:

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$



وهناك خاصية أخرى لجمع المتجهات تسمى **قانون ترابط الحدود لعملية الجمع Associative**:

$$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$$



- تمتلك الكمية المتجه كلا من المقدار والاتجاه، كما أنها تخضع لقوانين جمع المتجهات.

الإشارة السالبة للمتجه

يعرف سالب المتجه $\vec{A}$ بأنه المتجه الذي عند جمعه مع المتجه $\vec{A}$ يعطي مجموع يساوي صفر. هذا يعني،

$$\vec{A} + (-\vec{A}) = (-\vec{A}) + \vec{A} = 0$$

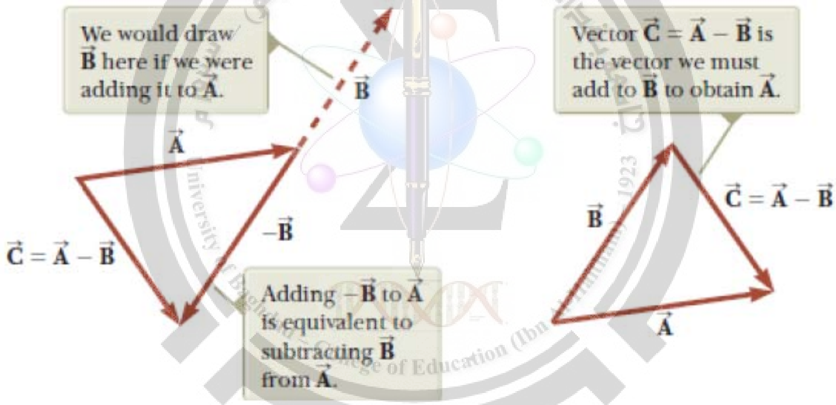
أي ان المتجهات $\vec{A}$ و $(-\vec{A})$ لها نفس المقدار لكن تتجه في اتجاهين متعاكسين.

طرح المتجهات

ان عملية طرح المتجهات تستخدم تعريف الإشارة السالبة للمتجه. حيث نعرف العملية $(\vec{A} - \vec{B})$ وكأن المتجه $(-\vec{B})$ يجمع مع المتجه $(\vec{A})$ كما يلي:

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

يوضح الشكل الاتي الإنشاء الهندسي لطرح متجهين بهذه الطريقة:

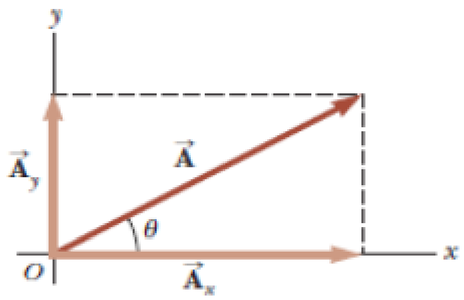


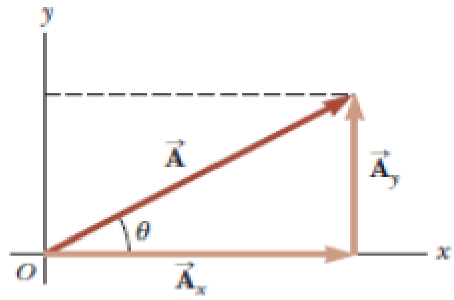
3.3 مركبات المتجه ومتجهات الوحدة Components of a Vector and Unit Vectors

مركبات المتجه Components of a Vector

يمكن وصف أي متجه بالكامل بوساطة مركباته.

نأخذ بنظر الاعتبار النظر المتجه $\vec{A}$ يكون في المستوى (xy) ويصنع زاوية (θ) مع المحور x الموجب كما هو مبين في الشكل أدناه.





يمكن التعبير عن هذا المتجه على أنه مجموع مركبة المتجه الموازية للمحور - x وهي $(\vec{A}_x)$، و المركبة $(\vec{A}_y)$ التي توازي المحور - y.

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$

من الشكل اعلاه وتعريف الجيب وجيب-تمام، نرى بان

$$\cos\theta = \frac{A_x}{A} \rightarrow A_x = A\ \cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{A_y}{A} \rightarrow A_y = A\ \sin\theta$$

يرتبط كل من مقدار واتجاه المتجه $(\vec{A})$ بمركباته من خلال المعادلات الاتية:

مقدار المتجه $\vec{A}$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

اتجاه المتجه $\vec{A}$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$$

متجهات الوحدة Unit Vectors

متجه الوحدة Unit Vector (متجه بدون أبعاد مقداره واحد بالضبط، ويستخدم لتحديد اتجاه معين).

سنستخدم الرموز على التوالي $(\hat{\imath}$ و $\hat{\jmath}$ و $\hat{k})$ لتمثيل متجهات الوحدة التي تشير إلى الاتجاهات الموجبة للمحاور $(x$ و y و $z)$.

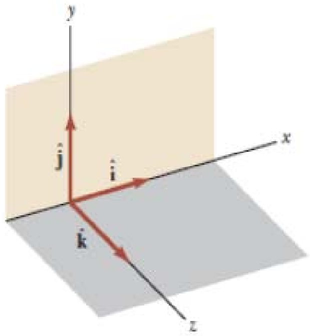
ان مقدار كل وحدة متجه تساوي واحد (1)؛ هذا يعني ان القيمة المطلقة لها تساوي واحد.

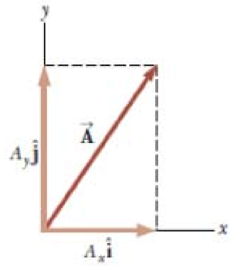
$$|\hat{\imath}\,| = |\hat{\jmath}| = |\hat{k}| = 1$$

$$\vec{A}_x = \hat{\imath}A_x \quad , \quad \vec{A}_y = \hat{\jmath}A_y$$

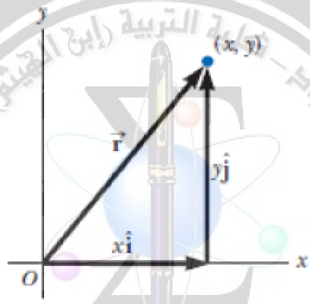
لذلك، يكتب المتجه $\vec{A}$ بدلالة متجه الوحدة كما يلي:

$$\vec{A} = \hat{\imath}A_x + \hat{\jmath}A_y$$





- خذ بنظر الاعتبار نقطة تقع في المستوى xy في الإحداثيات الكارتيزية $(x \text{ ، } y)$ كما في الشكل أدناه.



يمكن تحديد النقطة بواسطة متجه الموضع $(\vec{r})$ الذي يكتب بدلالة متجه الوحدة كما يلي:

$$\vec{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath}$$

- ان محصلة المتجه $\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y$ الناتج عن جمع متجهين $\vec{A} = (A_x\,\hat{\imath} + A_y\,\hat{\jmath})$ و $\vec{B} = (B_x\,\hat{\imath} + B_y\,\hat{\jmath})$ تعطى

$$\vec{R} = (A_x\,\hat{\imath} + A_y\,\hat{\jmath}) + (B_x\,\hat{\imath} + B_y\,\hat{\jmath})$$

$$\vec{R} = (A_x + B_x)\hat{\imath} + (A_y + B_y)\hat{\jmath}$$

لكون ان $\vec{R} = R_x\,\hat{\imath} + R_y\,\hat{\jmath}$ نجد بمقارنة ذلك مع المعادلتين اعلاه أن قيم مركبات المتجه $\vec{R}$ هي:

$$R_x = A_x + B_x \quad , \quad R_y = A_y + B_y$$

لذلك قيمة المتجه $\vec{R}$ يحصل عليهما من مركباته باستخدام العلاقة الاتية:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(A_x + B_x)^2 + \left(A_y + B_y\right)^2}$$

و يعطى اتجاهه بالنسبة الى الزاوية التي يصنعها مع المحور - x

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{A_y + B_y}{A_x + B_x}$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{A_y + B_y}{A_x + B_x}\right)$$

إذا كان كلا من المتجهان $\vec{A}$ و $\vec{B}$ يحتويان على ثلاثة مركبات باتجاه المحاور (x و y و z) ، فيمكن التعبير عنهما في الشكل الاتي:

$$\vec{A} = \hat{\imath}A_x + \hat{\jmath}A_y + \hat{k}A_z$$

$$\vec{B} = \hat{\imath}B_x + \hat{\jmath}B_y + \hat{k}B_z$$

- ان جمع المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ يعطى بالعلاقة $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$ او يعطى بدلالة مركباته كما يلي:

$$\vec{R} = \left(\hat{\imath}A_x + \hat{\jmath}A_y + \hat{k}A_z\right) + \left(\hat{\imath}B_x + \hat{\jmath}B_y + \hat{k}B_z\right)$$

$$\vec{R} = (A_x + B_x)\hat{\imath} + \left(A_y + B_y\right)\hat{\jmath} + (A_z + B_z)\hat{k}$$

مثال (3.1): جد مجموع متجهي الإزاحة $\vec{A} = (2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath})\text{m}$ و $\vec{B} = (2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath})\text{m}$ الواقعان في المستوى xy .

الحل: تعطى محصلة المتجه الناتج عن الجمع الاتجاهي

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$

$$\vec{R} = (2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}) + (2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath})$$

$$\vec{R} = (2 + 2)\hat{\imath} + (2 - 4)\hat{\jmath}$$

$$\vec{R} = 4\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$$

لذلك مركبات المتجه $\vec{R}$ الناتج هي $R_x = 4\text{ m}$ و $R_y = -2\text{ m}$

و مقدار المتجه $\vec{R}$ يعطى بـ

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 4.5\text{ m}$$

واتجاه المتجه $\vec{R}$ يعطى بـ

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{-2}{4} = -0.5$$

$$\therefore\ \theta = \tan^{-1}(-0.5) = -27^o$$

هذه الإجابة تكون صحيحة إذا فسرت على أنها 27^o في اتجاه عقارب الساعة من المحور x.

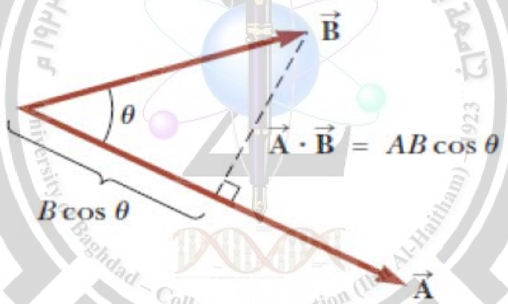
3.4 الضرب العددي Scalar Product

يُعرف الضرب العددي لأي متجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بأنه (كمية عددية تساوي ناتج ضرب مقداريهما مع جيب تمام الزاوية θ التي بينهما):

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A\,B\ \cos\theta$$

يكتب الضرب العددي للمتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بالشكل $\vec{A}\cdot\vec{B}$ (و بسبب وضع رمز النقطة ، غالبا ما يطلق على الضرب العددي بالضرب النقطي).

- يساوي الضرب العددي $\vec{A}\cdot\vec{B}$، قيمة المتجه $\vec{A}$ مضروبا في مسقط المتجه $\vec{B}$ على المتجه $\vec{A}$ أي ان ($B\ \cos\theta$) كما هو موضح في الشكل أدناه



خصائص الضرب العددي Properties of the scalar product

1. يكون الضرب العددي **تبديليا Commutative**:
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$$
2. يخضع الضرب العددي لقانون **التوزيع Distributive** للضرب:
$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$$
3. إذا كان المتجه $\vec{A}$ عموديا على المتجه $\vec{B}$ (أي ان الزاوية بينهما تساوي 90^o) فان الضرب العددي بينهما يساوي $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$
4. إذا كان المتجه $\vec{A}$ موازيا للمتجه $\vec{B}$ بنفس الاتجاه (أي ان الزاوية بينهما تساوي 0^o) فان الضرب العددي بينهما يعطى بـ $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB$
5. إذا كان المتجه $\vec{A}$ موازيا للمتجه $\vec{B}$ ولكنهما متعاكسي الاتجاه (أي ان الزاوية بينهما تساوي 180^o) فان الضرب العددي بينهما يعطى بـ $\vec{A}\cdot\vec{B} = -AB$

6. يكون الضرب العددي لمتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ سالب الإشارة عندما تكون الزاوية بينهما فيما بين $(90^o < \theta \leq 180^o)$
7. ان الضرب العددي بين متجهات الوحدة بنفس الاتجاه يساوي واحد أي ان

$$\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

8. ان الضرب العددي بين متجهات الوحدة باتجاهات متعامدة يساوي صفر

$$\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{k} = \hat{\jmath} \cdot \hat{k} = 0$$

9. عرفنا سابقا بانه يمكن التعبير عن متجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بشكل متجه الوحدة على النحو الاتي:

$$\vec{A} = \hat{\imath}A_x + \hat{\jmath}A_y + \hat{k}A_z$$

$$\vec{B} = \hat{\imath}B_x + \hat{\jmath}B_y + \hat{k}B_z$$

لذلك يكون

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

وان

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2$$

مثال (3.2): اذا كان المتجهات $\vec{A} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$ و $\vec{B} = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$

(A) جد الضرب العددي بينهما. (B) أوجد الزاوية (θ) بينهما.

الحل: (A)

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}) \cdot (-\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}) = -2 + 6 = 4$$

(B) لإيجاد الزاوية نطبق العلاقة $\vec{A} \cdot \vec{B} = A\ B\ \cos\theta$. لذلك علينا إيجاد قيمة كل من المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ حيث ان قيمة $\vec{A} \cdot \vec{B}$ قد حسبت في الفرع (A).

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$$

بترتيب العلاقة $\vec{A} \cdot \vec{B} = A\ B\ \cos\theta$ للحصول على الزاوية يكون لدينا

$$\cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{A\ B} = \frac{4}{(\sqrt{13})(\sqrt{5})} = \frac{4}{\sqrt{65}}$$

$$\therefore\ \theta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{65}}\right) = 60.3^{o}$$

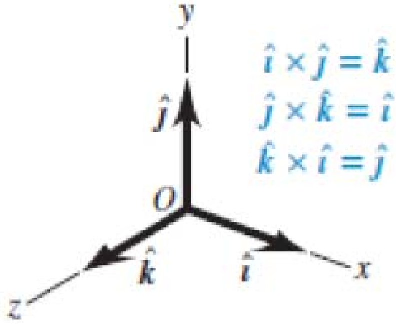
3.5 الضرب الاتجاهي Vector Product

يعرف الضرب الاتجاهي $\vec{A}\times\vec{B}$ لأي متجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ، بأنه المتجه الثالث $\vec{C}$، الذي له قيمة $A\ B\ \sin\theta$ ، حيث ان $\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$ وقيمة الضرب الاتجاهي $C = A\ B\ \sin\theta$

- ويسمى الضرب الاتجاهي أيضا بـ **Cross Product**

خصائص الضرب الاتجاهي Properties of the vector product

1. ان الضرب الاتجاهي ليس تبديليا Commutative (أي ان $\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$) لذلك ، إذا قمنا بتغيير ترتيب المتجهات في الضرب الاتجاهي ، فيجب علينا تغيير الاشارة.
2. إذا كان المتجه $\vec{A}$ موازيا للمتجه $\vec{B}$ (أي ان الزاوية بينهما تساوي 0^{o} او 180^{o}) فان الضرب الاتجاهي بينهما يعطى بـ $\vec{A}\times\vec{B} = A\ B\ \sin\theta = 0$ وان $\vec{A}\cdot\vec{A} = 0$
3. إذا كان المتجه $\vec{A}$ عموديا على المتجه $\vec{B}$ (أي ان الزاوية بينهما تساوي 90^{o}) فان الضرب الاتجاهي بينهما يعطى $|\vec{A}\times\vec{B}| = AB$.
4. يخضع الضرب الاتجاهي لقانون التوزيع Distributive
$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$$
5. ان مشتقة الضرب الاتجاهي بالنسبة الى بعض المتغيرات مثل (t) تكون
$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B}+\vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}$$
6. ان الضرب الاتجاهي بين متجهات الوحدة ($\hat{\imath}$ و $\hat{\jmath}$ و $\hat{k}$) يخضع للقواعد الاتية:
   - $\hat{\imath}\times\hat{\imath} = \hat{\jmath}\times\hat{\jmath} = \hat{k}\times\hat{k} = 0$
   - $\hat{\imath}\times\hat{\jmath} = \hat{k}$ و $\hat{\jmath}\times\hat{\imath} = -\hat{k}$
   - $\hat{\jmath}\times\hat{k} = \hat{\imath}$ و $\hat{k}\times\hat{\jmath} = -\hat{\imath}$
   - $\hat{k}\times\hat{\imath} = \hat{\jmath}$ و $\hat{\imath}\times\hat{k} = -\hat{\jmath}$



يمكن التعبير عن الضرب الاتجاهي لأي متجهين $\vec{A} = \hat{\imath}A_x + \hat{\jmath}A_y + \hat{k}A_z$ و $\vec{B} = \hat{\imath}B_x + \hat{\jmath}B_y + \hat{k}B_z$ بشكل المحددة determinant الاتية:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \hat{\imath}\begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} + \hat{\jmath}\begin{vmatrix} A_z & A_x \\ B_z & B_x \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath}(A_yB_z - A_zB_y) + \hat{\jmath}(A_zB_x - A_xB_z) + \hat{k}(A_xB_y - A_yB_x)$$

مثال (3.3): إذا كان المتجهان $\vec{A} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$ و $\vec{B} = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$ في المستوى xy. جد $\vec{A} \times \vec{B}$ ، أيضا تحقق من العلاقة $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

الحل: نستعمل المحددة السابقة

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \hat{\jmath}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath}(0-0) + \hat{\jmath}(0-0) + \hat{k}[(2)(2) - (3)(-1)] = 7\hat{k}$$

للتحقق من العلاقة $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$ نستعمل نفس الطريقة كما يلي:

$$\vec{B} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + \hat{\jmath}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath}(0-0) + \hat{\jmath}(0-0) + \hat{k}[(-1)(3) - (2)(2)] = -7\hat{k}$$

لذلك العلاقة صحيحة.

مثال (3.4): مقدار المتجه $\vec{A}$ يساوي (6) وحدات ويقع في اتجاه المحور - x الموجب. ومقدار المتجه $\vec{B}$ يساوي (4) وحدات ويقع في مستوى xy ، صانعا زاوية مقدارها 30^o مع المحور - x. جد $\vec{A} \times \vec{B}$

الحل: يمكن كتابة المتجهان كما يلي

$$\vec{A} = 6\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 0\hat{k}$$

$$\vec{B} = (4\ \cos 30^o)\hat{\imath} + (4\ \sin 30^o)\hat{\jmath} + 0\hat{k}$$

$$\vec{B} = \left(4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\hat{\imath} + \left(4 \times \frac{1}{2}\right)\hat{\jmath} + 0\hat{k}$$

$$\vec{B} = 2\sqrt{3}\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 0\hat{k}$$

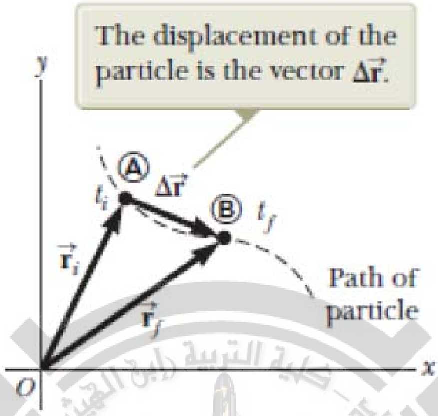
$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 6 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 2 & 0 \end{vmatrix} = \hat{\imath} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \hat{\jmath} \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 2\sqrt{3} \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath}(0-0) + \hat{\jmath}(0-0) + \hat{k}\left[(6)(2) - (0)\left(2\sqrt{3}\right)\right] = 12\hat{k}$$

(الحركة في بعدين Motion in Two Dimensions)

4.1 متجهات الموضع والسرعة والتعجيل

نبدأ بوصف موضع الجسيم بوساطة **متجه الموضع** $(\vec{r})$، المرسوم من نقطة أصل نظام الإحداثيات إلى موقع الجسيم في المستوى (xy) كما هو موضح في الشكل.



فعند الزمن t_i، يكون الجسيم عند النقطة (A) ، الموضحة بوساطة متجه الموضع $(\vec{r}_i)$.

في زمن لاحق t_f، يكون الجسيم عند النقطة (B) ، الموضحة بواسطة متجه الموضع $(\vec{r}_f)$.

وليس بالضرورة ان يكون المسار من (A) إلى (B) خطا مستقيما. وعندما يتحرك الجسيم من النقطة (A) إلى النقطة (B) في الفاصلة الزمنية $(\Delta t = t_f - t_i)$ ، يتغير متجه الموضع من $\vec{r}_i$ إلى $\vec{r}_f$.

الآن نعرف **متجه الإزاحة** $(\Delta\vec{r})$ للجسيم باعتباره (الفرق بين متجه الموضع النهائي ومتجه الموضع الأولي):

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i \qquad (4.1)$$

كما نرى من الشكل أعلاه، فإن قيمة متجه الازاحة $(\Delta\vec{r})$ أقل من المسافة المقطوعة على طول مسار المنحني المقطوع من قبل الجسيم.

- يعطى **متوسط السرعة** $(\vec{v}_{\mathrm{av}})$ للجسيم خلال الفاصلة الزمنية (Δt) من حاصل قسمة إزاحة الجسيم $\Delta\vec{r}$ على الفاصلة الزمنية

$$\vec{v}_{\mathrm{av}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad (4.2)$$

- ان ضرب أو قسمة كمية المتجه على كمية عددية موجبة مثل (Δt) يغير فقط من قيمة المتجه، وليس اتجاهه. ونظرا لأن الإزاحة هي كمية متجه والفاصلة الزمنية هي كمية عددية موجبة، نستنتج أن متوسط السرعة هو كمية متجه تكون على طول الازاحة $(\Delta\vec{r})$.
- ان متوسط السرعة بين النقاط تكون مستقلة عن المسار.
- تُعرف **السرعة الآنية** $(\vec{v})$ بأنها (غاية متوسط السرعة $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ عندما تقترب Δt من الصفر):

$$\vec{v} = \lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (4.3)$$

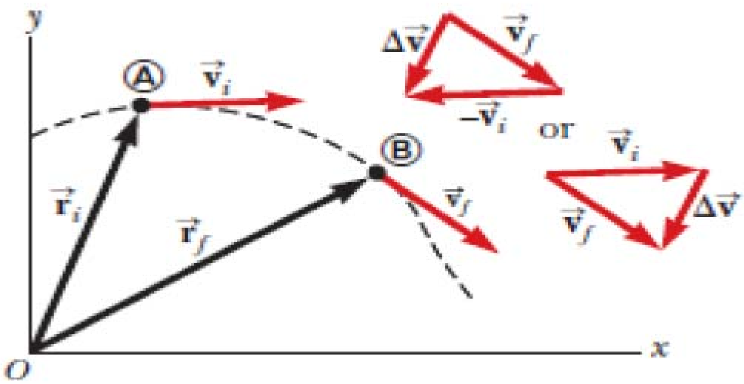
- تدعى قيمة متجه السرعة الآنية $v = |\vec{v}|$ للجسيم بانها **انطلاق** الجسيم ، وهي كمية عددية.
- يُعرف **متوسط تعجيل** $\vec{a}_{\text{av}}$ للجسيم بأنه (التغير في متجه السرعة الآنية $\Delta\vec{v}$ مقسوما على الفاصلة الزمنية Δt التي يحدث فيها هذا التغيير):

$$\vec{a}_{\text{av}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} \qquad (4.4)$$

ان متوسط التعجيل هو كمية متجه.

- يُعرف **التعجيل الآني** $(\vec{a})$ بانه قيمة الغاية للنسبة $\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ عندما تقترب Δt من الصفر):

$$\vec{a} = \lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (4.5)$$



4.2 الحركة في بعدين بتعجيل ثابت Two-Dimensional Motion with Constant Acceleration

يمكن نمذجة modelled الحركة في البعدين وكأنها حركتين مستقلتين independent في كل اتجاه من الاتجاهات العمودية المرتبطة بمحوري x و y. بمعنى أن أي تأثير في الاتجاه y لا يؤثر على الحركة في الاتجاه x والعكس صحيح.

يمكن كتابة متجه الموضع لجسيم يتحرك في المستوى xy:

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} \qquad (4.6)$$

وان سرعة الجسيم تعطى بالعلاقة:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} \qquad (4.7)$$

ولتحديد السرعة النهائية في أي زمن t ، كما يلي:

$$\vec{v}_f = (v_{ix} + a_x t)\hat{\imath} + (v_{iy} + a_y t)\hat{\jmath}$$

$$= (v_{ix}\hat{\imath} + v_{iy}\hat{\jmath}) + (a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath})t$$

لذلك يكون متجه السرعة كدالة للزمن معطى بالعلاقة

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}\,t \qquad (4.8)$$

بنفس الطريقة يكون

$$x_f = x_i + v_{ix}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$y_f = y_i + v_{iy}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

بتعويض هذه المعادلات في المعادلة $(\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath})$ وتسمية متجه الموضع النهائي بـ $(\vec{r}_f)$ يكون:

$$\vec{r}_f = \left(x_i + v_{ix}t + \frac{1}{2}a_x t^2\right)\hat{\imath} + \left(y_i + v_{iy}t + \frac{1}{2}a_y t^2\right)\hat{\jmath}$$

$$\vec{r}_f = (x_i\hat{\imath} + y_i\hat{\jmath}) + (v_{ix}\hat{\imath} + v_{iy}\hat{\jmath})t + \frac{1}{2}(a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath})t^2$$

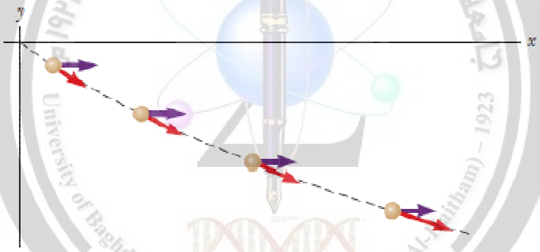
فيكون متجه الموضع كدالة للزمن معطى بالمعادلة

$$\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \qquad (4.9)$$

مثال (4.1): يتحرك جسيم في المستوى xy ، مبتدأ من نقطة الأصل عند الزمن $(t = 0)$ بسرعة ابتدائية لها مركبة على محور - x قيمتها $(20\ \text{m/s})$ ومركبة على محور- y قيمتها $(-15\ \text{m/s})$. يخضع الجسيم لتعجيل في اتجاه المحور- x ، بمقدار $(4\ \text{m/s}^2)$.

(A) حدد متجه السرعة الكلي عند أي زمن.

الحل: (A) تخبرنا مركبات السرعة الابتدائية أن الجسيم يبدأ بالتحرك نحو اليمين وإلى الأسفل كما في الشكل الاتي:



تبدأ المركبة- x بسرعة $(20\ \text{m/s})$ وتتزايد بمقدار $(4\ \text{m/s}\ )$ لكل ثانية. اما مركبة السرعة باتجاه y فأنها لا تتغير مطلقا عن قيمتها الابتدائية $(-15\ \text{m/s})$.

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}t$$

$$\vec{v}_f = (v_{ix} + a_x t)\hat{\imath} + (v_{iy} + a_y t)\hat{\jmath}$$

$$\vec{v}_f = (20 + 4t)\hat{\imath} + (-15 + 0t)\hat{\jmath}$$

$$\vec{v}_f = (20 + 4t)\hat{\imath} - 15\hat{\jmath} \qquad \text{m/s}$$

(B) احسب سرعة وانطلاق الجسيم عند الزمن $(t = 5\ \text{s})$ والزاوية التي يصنعها متجه السرعة مع المحور- x.

الحل:

$$\vec{v}_f = (20 + 4t)\hat{\imath} - 15\hat{\jmath}$$

$$\vec{v}_f = [20 + 4(5)]\hat{\imath} - 15\hat{\jmath}$$

$$\vec{v}_f = (40\hat{\imath} - 15\hat{\jmath}) \qquad \mathrm{m/s}$$

اما الزاوية θ فتعطى بالعلاقة

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{yf}}{v_{xf}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-15}{40}\right) = -21^{o}$$

تشير الاشارة السالبة للزاوية θ إلى أن متجه السرعة موجه بزاوية θ تحت المحور x الموجب.

ويحسب انطلاق الجسيم من قيمة $\vec{v}_f$ كما يلي

$$v_f = |\vec{v}_f| = \sqrt{v_{xf}^2 + v_{yf}^2} = \sqrt{(40)^2 + (15)^2} = 43 \ \mathrm{m/s}$$

(C) حدد إحداثي x و y للجسيم في أي وقت t و متجه موضعه في هذا الزمن.

$$x_f = v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2 = (20t + 2t^2)\ \mathrm{m}$$

$$y_f = v_{yi}t = (-15t) \ \ \mathrm{m}$$

فيكون متجه الموضع للجسيم في أي زمن t:

$$\vec{r}_f = (x_f\hat{\imath} + y_f\hat{\jmath}) = [(20t + 2t^2)\hat{\imath} - 15t\hat{\jmath}] \quad \mathrm{m}$$

4.3 حركة المقذوف Projectile Motion

ان أي شخص لاحظ حركة الكرة في لعبة البيسبول يكون قد لاحظ حركة المقذوف، حيث تتحرك الكرة في مسار منحني وتعود إلى الأرض. ان طريق الذي تسلكه الكرة، نسميه **المسار** trajectory، يكون دائما على شكل **قطع مكافئ** **parabola**.

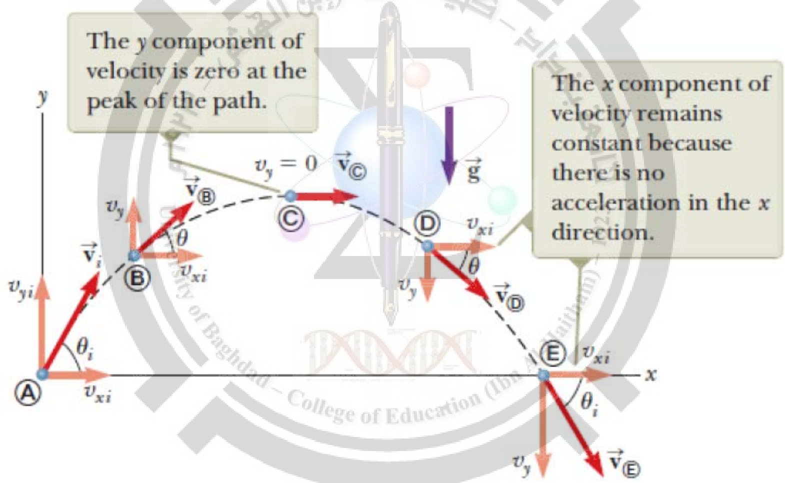
إن معادلة متجه موقع المقذوف كدالة للزمن تتبع مباشرة المعادلة $\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$ ، التي يكون تعجيلها بسبب الجاذبية، هو $\vec{a} = \vec{g}$ تكون

$$\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \qquad (4.10)$$

حيث تكون مركبات x و y الأولية لسرعة المقذوف معطاة بـ

$$v_{xi} = v_i \cos\theta_i \qquad , \qquad v_{yi} = v_i \sin\theta_i$$

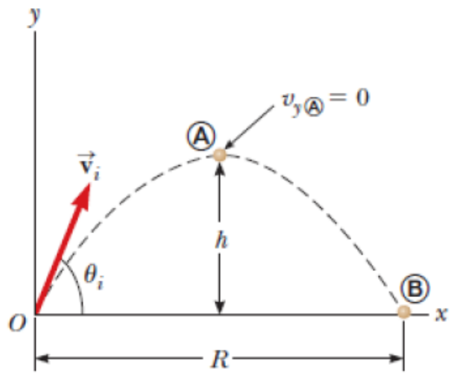
عند تحليل حركة المقذوفات، فانه يمكن نمذجتها، وكأنها متكونة من تراكب superposition حركتين: (1) حركة جسيم بسرعة ثابتة في الاتجاه الأفقي horizontal و (2) حركة جسيم بتعجيل ثابت (السقوط الحر free fall) في الاتجاه العمودي vertical.



المدى الأفقي وأقصى ارتفاع يصل اليه المقذوف Horizontal Range and Maximum Height of a Projectile

دعنا نفترض ان كرة قذفت من نقطة الأصل عند الزمن $t_i = 0$ بمركبة v_{yi} موجبة كما هو موضح في الشكل أعلاه، ان الكرة ستعود للأرض في نفس المستوى الأفقي. هذه حالة هي حالة شائعة في الألعاب الرياضية، حيث غالبا ما تهبط كرة البيسبول وكرة القدم وكرة الغولف بنفس المستوى الذي قذفت منه.

في الشكل الاتي هناك نقطتان في هذه الحركة مثيرة للاهتمام بشكل خاص علينا تحليلها:



- نقطة القمة A التي إحداثياتها الكارتيزية $(R/2\,, h)$، هي اعلى ارتفاع يصل له المقذوف.
- النقطة B التي لها إحداثيات $(R, 0)$، هي نقطة هبوط المقذوف.
- تسمى المسافة (R) **المدى الأفقي** للمقذوف، والمسافة (h) هي **أقصى ارتفاع** يصل اليه.

دعنا نجد كل من اقصى الارتفاع الذي يصل له المقذوف (h) و مداه (R) رياضيا بحدود كل من سرعة اطلاق المقذوف v_i و الزاوية التي اطلق بها θ_i والتعجيل الارضي g:

يمكننا تحديد اقصى الارتفاع (h) بملاحظة أنه في القمة تكون السرعة مساوية الى الصفر v_{yA} . لذلك، يمكننا استخدام مركبة y للمعادلة $(\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}\, t)$ لتحديد الزمن t_A الذي يصل فيه المقذوف إلى قمة ارتفاعه حيث

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}\, t \quad \rightarrow \quad \vec{v}_{fy} = \vec{v}_{iy} + \vec{a}_y\, t_A \quad \rightarrow \quad 0 = \vec{v}_{iy} + \vec{a}_y\, t_A$$

وحيث ان $v_{iy} = v_i \sin\theta_i$ وبتعويض $(-g)$ بدل $\vec{a}_y$ تكون المعادلة الأخيرة

$$0 = v_i \sin\theta_i - g\, t_A$$

$$t_A = \frac{v_i \sin\theta_i}{g}$$

بتعويض معادلة t_A أعلاه بدل t في المركبة y من المعادلة $(y = y_i + v_{iy}t + \frac{1}{2}a_y t^2)$ واستبدال y التي تساوي y_A بأقصى ارتفاع يصل له المقذوف h، واخذ بنظر الاعتبار ان المقذوف اطلق من نقطة الأصل $(0,0)$ أي ان $y_i = 0$ وان $v_{iy} = v_i \sin\theta_i$ ، واستبدال a_y بـ g نحصل على معادلة للارتفاع h بحدود مقدار واتجاه متجه السرعة الأولي كما يلي:

$$y = y_i + v_{iy}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

$$h = 0 + (v_i \sin\theta_i)\left(\frac{v_i \sin\theta_i}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_i \sin\theta_i}{g}\right)^2$$

$$h = \frac{v_i^2 \sin^2\theta_i}{g} - \frac{1}{2}g\frac{v_i^2 \sin^2\theta_i}{g^2}$$

$$h = \frac{v_i^2 \sin^2\theta_i}{2g}$$

هذه المعادلة تعطي **اقصى ارتفاع يصل له المقذوف.**

- ان المدى R هو موضع هبوط المقذوف الأفقي، حيث يصل الى هذه النقطة في زمن يساوي ضعف الزمن الذي يصل فيه إلى اعلى ارتفاع، أي ان زمن تحليق المقذوف من اطلاقه حتى يصل لنهاية رحلته في النقطة $(0, R)$ يكون في الزمن $t_B = 2t_A$

بتعويض معادلة $t_B = 2t_A$ بدل t في المركبة x من المعادلة $(x = x_{ix} + v_{ix}t + \frac{1}{2}a_x t^2)$ واستبدال x التي تساوي R المدى يصل له المقذوف ، واخذ بنظر الاعتبار ان المقذوف اطلق من نقطة الأصل $(0,0)$ أي ان $x_{ix} = 0$ وان $v_{ix} = v_i \cos\theta_i$ ، واستبدال $a_x = 0$ نحصل على معادلة R كما يلي:

$$R = v_{xi}t_B = (v_i \cos\theta)(2t_A)$$

$$R = (v_i \cos\theta_i)\left(\frac{2v_i \sin\theta_i}{g}\right)$$

$$R = \frac{2v_i^2 \sin\theta_i \cos\theta_i}{g}$$

باستخدام المتطابقة الرياضية

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

يكون **المدى الافقي للمقذوف**

$$R = \frac{v_i^2 \sin 2\theta_i}{g} \qquad (4.12)$$

ونحصل على أقصى قيمة للمدى R من المعادلة الاخيرة عندما تكون قيمة $\sin 2\theta_i = 1$ حيث يكون

$$R_{\max} = \frac{v_i^2}{g}$$

وهذا يحدث عند الزاوية $2\theta_i = 90^o$ ولذلك تكون الزاوية $\theta_i = 45^o$ هي الزاوية التي نحصل منها على اقصى مدى.

مثال (4.2):

يترك لاعب الطفر العريض الأرض بزاوية 20^o فوق المستوى الأفقي وبسرعة $(11.0\ m/s)$.

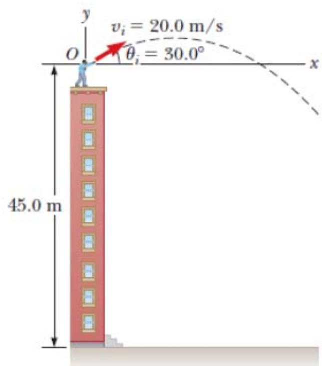
(A) جد المدى الذي يقفز اليه اللاعب؟ (B) جد أقصى ارتفاع يصل اليه؟

الحل: (A): نستخدم المعادلة

$$R = \frac{v_i^2 \sin 2\theta_i}{g} = \frac{(11)^2 \sin(2\times 20^o)}{9.80} = 7.94\ \text{m}$$

(B): نستخدم المعادلة

$$h = \frac{v_i^2 \sin^2\theta_i}{2g} = \frac{(11)^2 \sin^2(20^o)}{2\times 9.80} = 0.722\ \text{m}$$



مثال (4.3): تم القاء حجر من أعلى المبنى الى لأعلى بزاوية (30^o) عن المستوى الأفقي بسرعة ابتدائية قدرها $(20.0\ m/s)$ كما هو موضح في الشكل. ان **الارتفاع** الذي ألقيت منه الحجارة هو $(45\ m)$ فوق سطح الأرض.

(A) كم من الوقت يستغرق الحجر للوصول إلى الأرض؟

الحل: (A) نأخذ بنظر الاعتبار ان نقطة الأصل (0,0) تقع في يد الرجل لذلك تكون $x_i = y_i = 0$

ولذلك نطبق العلاقة $y_f = y_i + v_{iy}t + \frac{1}{2}a_y t^2$ ، حيث ان $v_{iy} = v_i \sin\theta_i$ وملاحظة واستبدال a_y بـ g فيكون

$$y_f = y_i + v_{iy}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \rightarrow y_f = y_i + v_i \sin\theta_i\, t + \frac{1}{2}g t^2$$

$$-45 = 0 + 20\,(\sin 30^o)t + \frac{1}{2}(-9.80)t^2$$

$$-45 = 10\,t + \frac{1}{2}(-9.80)t^2$$

$$t = 4.22\ \text{s}$$

(B) ما هي سرعة الحجر قبل أن يصطدم بالأرض مباشرة؟

الحل: نطبق المعادلة $\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}\,t$ حيث نستبدل $\vec{a}$ بـ $-g$ وكذلك $\vec{v}_i$ بـ $v_{iy} = v_i \sin\theta_i$

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}\,t \rightarrow v_{fy} = v_i \sin\theta_i - g\,t$$

$$v_{fy} = 20\,(\sin 30^o) - 9.80 \times 4.22 = -31.3\ \text{m/s}$$

Chapter 3

Vectors

3.1 Vector and Scalar Quantities

- A **scalar quantity** is completely specified by a single value with an appropriate unit and has no direction.

Examples of scalar quantities are temperature, volume, mass, speed, and time intervals.

- A **vector quantity** is completely specified by a number with an appropriate unit plus a direction.

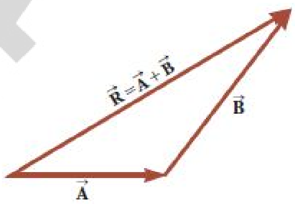
Examples of vector quantity are displacement and velocity.

3.2 Some Properties of Vectors

Adding Vectors

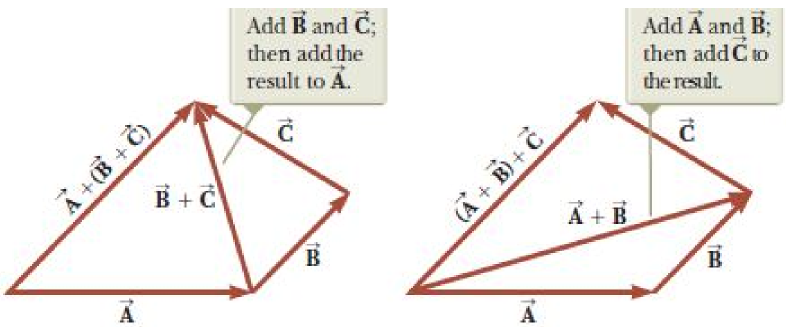
When two vectors (vector $\vec{A}$ and vector $\vec{B}$) are added, the sum is independent of the order of the addition. This property is known as the **(commutative law of addition):**

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$



Another property is called the **associative law of addition:**

$$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$$



- A vector quantity has both magnitude and direction and also obeys the laws of vector addition.

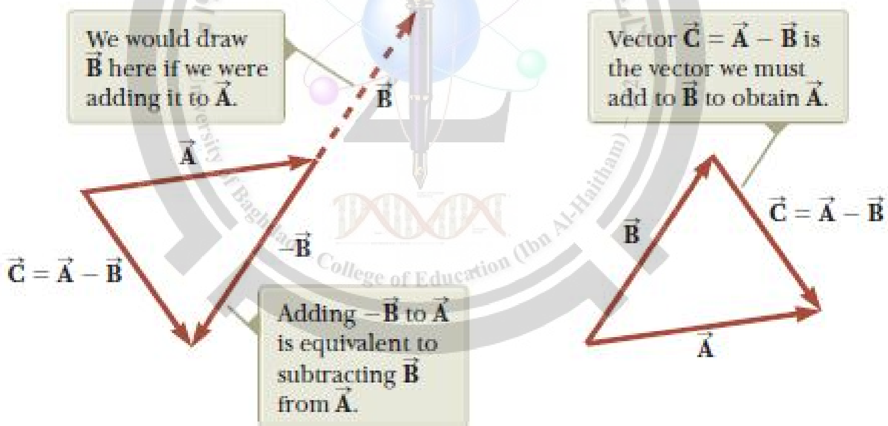
Negative of a Vector

The negative of the vector $\vec{A}$ is defined as the vector that when added to $\vec{A}$ gives zero for the vector sum. That is, $\vec{A} + (-\vec{A}) = 0$. The vectors $\vec{A}$ and (-$\vec{A}$) have the same magnitude but point in opposite directions.

Subtracting Vectors

The operation of vector subtraction makes use of the definition of the negative of a vector. We define the operation ($\vec{A} - \vec{B}$) as vector $(-\vec{B})$ added to vector ($\vec{A}$): $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$

The geometric construction for subtracting two vectors in this way is illustrated in the figure below:



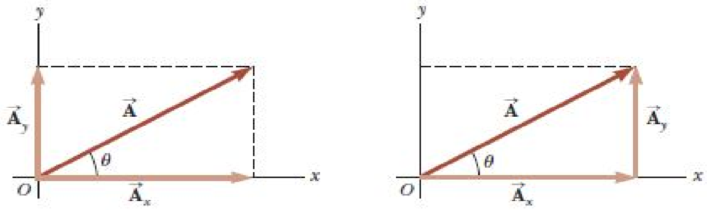
3.3 Components of a Vector and Unit Vectors

Components of a Vector

Any vector can be completely described by its components.

Consider a vector $(\vec{A})$ lying in the (xy plane) and making an angle (θ) with the positive (x-axis) as shown in the figure below. This vector can be expressed as the sum of two other *component* vectors ($\vec{A}_x$), which is parallel to the (x-axis), and ($\vec{A}_y$), which is parallel to the (y-axis).

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$



From the figure and the definition of sine and cosine, we see that ($\cos\theta = A_x / A$) and that ($\sin\theta = A_y / A$). Hence, the components of $\vec{A}$

$$A_x = A\cos\theta \text{ and } A_y = A\sin\theta$$

The magnitude and direction of ($\vec{A}$) are related to its components through the expressions:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \qquad \text{(magnitude of } \vec{A}\text{)}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{Ay}{Ax}\right) \qquad \text{(direction of } \vec{A}\text{)}$$

Unit Vectors

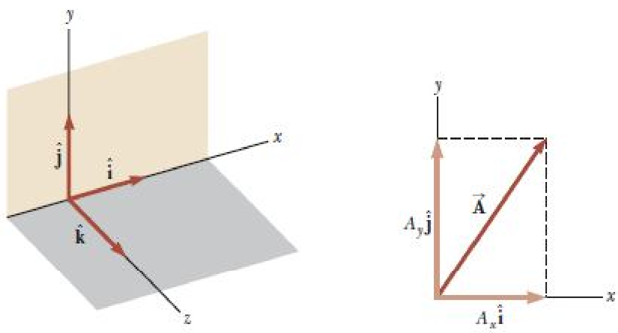
A **unit vector** is (a dimensionless vector having a magnitude of exactly one, and are used to specify a given direction).

We shall use the symbols ($\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, and $\hat{k}$) to represent unit vectors pointing in the positive (*x*, *y*, and *z*) directions, respectively.

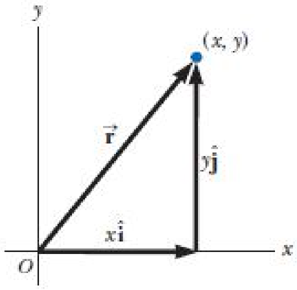
The magnitude of each unit vector equals 1; that is, $|\hat{\imath}| = |\hat{\jmath}| = |\hat{k}| = 1$

$\vec{A}_x = \hat{\imath}\, A_x$, $\vec{A}_y = \hat{\jmath}\, A_y$. Therefore, the unit-vector notation for the vector $\vec{A}$ is:

$$\vec{A} = \hat{\imath}\, A_x + \hat{\jmath}\, A_y$$



- Consider a point lying in the xy plane and having Cartesian coordinates (x, y) as in the figure below. The point can be specified by the **position vector** ($\vec{r}$) which in unit-vector form is given by:



$$\vec{r} = \hat{\imath}\, x + \hat{\jmath}\, y$$

- The resultant vector ($\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$) is:

$$\vec{R} = (\hat{\imath}\, A_x + \hat{\jmath}\, A_y) + (\hat{\imath}\, B_x + \hat{\jmath}\, B_y) \text{ or}$$

$$\vec{R} = \hat{\imath}\,(A_x + B_x) + \hat{\jmath}\,(A_y + B_y)$$

Because $\vec{R} = \hat{\imath}\ R_x + \hat{\jmath}\ R_y$, we see that the components of the resultant vector are: $R_x = (A_x + B_x)$ and $R_y = (A_y + B_y)$.

The magnitude of $\vec{R}$ and the angle it makes with the (x- axis) are obtained from its components using the relationships:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2} \qquad \text{Magnitude of } \vec{R}$$

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{A_y + B_y}{A_x + B_x} \qquad \text{Direction of } \vec{R}$$

- If $\vec{A}$ *and* $\vec{B}$ both have three components (x,y,z), they can be expressed in the form:

$$\vec{A} = \hat{\imath}\, A_x + \hat{\jmath}\, A_y + \hat{k}\, A_z$$

$$\vec{B} = \hat{\imath}\, B_x + \hat{\jmath}\, B_y + \hat{k}\, B_z$$

The sum of $\vec{A}$ *and* $\vec{B}$ is: $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$ or

$$\vec{R} = \hat{\imath}\,(A_x + B_x) + \hat{\jmath}\,(A_y + B_y) + \hat{k}\,(A_z + B_z)$$

Example (3.1):

Find the sum of two displacement vectors $\vec{A}$ *and* $\vec{B}$ lying in the *xy* plane and given by: $\vec{A} = (\,2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath})$ m and $\vec{B} = (\,2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath})$ m.

Solution:

The resultant vector $\vec{R}$: $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = \hat{\imath}\,(A_x + B_x) + \hat{\jmath}\,(A_y + B_y)$

$= \hat{\imath}\,(2+2) + \hat{\jmath}\,(2-4\,)$

The components of $\vec{R}$: $R_x = 4$ m and $R_y =$ -2 m

The magnitude of $\vec{R}$: $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 4.5$ m

The direction of $\vec{R}$: $\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{-2}{4} = -\,0.5$

$$\theta = -\,27°$$

This answer is correct if we interpret it to mean 27° clockwise from the (*x* – axis).

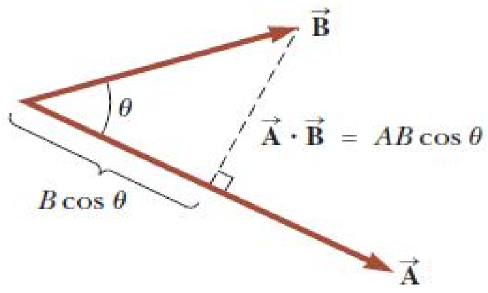
3.4 Scalar Product

The scalar product of any two vectors $\vec{A}$ *and* $\vec{B}$ is defined as (a scalar quantity equal to the product of the magnitudes of the two vectors and the cosine of the angle θ between them):

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = AB\cos\theta$$

We write scalar product of vectors $\vec{A}$ *and* $\vec{B}$ as $\vec{A} \bullet \vec{B}$ (Because of the dot symbol, the scalar product is often called the **dot product**).

- The scalar product ($\vec{A} \bullet \vec{B}$) equals the magnitude of $\vec{A}$ multiplied by the projection of $\vec{B}$ onto $\vec{A}$:($B\cos\theta$) as shown in the figure below.



Properties of the scalar product:

1. Scalar product is **commutative**:
$$\vec{A} \bullet \vec{B} = \vec{B} \bullet \vec{A}$$
2. Scalar product obeys the **distributive law of multiplication**:
$$\vec{A} \bullet (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \bullet \vec{B} + \vec{A} \bullet \vec{C}$$
3. If $\vec{A}$ is perpendicular to $\vec{B}$ (θ = 90°), then $\vec{A} \bullet \vec{B} = 0$.
4. If $\vec{A}$ is parallel to $\vec{B}$ (θ = 0°), then $\vec{A} \bullet \vec{B} = AB$.
5. If θ = 180°, then $\vec{A} \bullet \vec{B} = -AB$.
6. The scalar product is negative when (90°< $\theta \le$ 180°).

$\hat{\imath} \bullet \hat{\imath} = \hat{\jmath} \bullet \hat{\jmath} = \hat{k} \bullet \hat{k} = 1$

$\hat{\imath} \bullet \hat{\jmath} = \hat{\imath} \bullet \hat{k} = \hat{\jmath} \bullet \hat{k} = 0$

Two vectors $\vec{A}$ and $\vec{B}$ can be expressed in unit vector form as:

$$\vec{A} = \hat{\imath}A_x + \hat{\jmath}A_y + \hat{k}A_z$$

$$\vec{B} = \hat{\imath}B_x + \hat{\jmath}B_y + \hat{k}B_z$$

so $\vec{A} \bullet \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$ *and* $\vec{A} \bullet \vec{A} = A^2$.

Example (3.2):

The vectors $\vec{A}$ and $\vec{B}$ are given by: $\vec{A} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$ and $\vec{B} = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$

(A) Determine the scalar product $\vec{A} \bullet \vec{B}$

(B) Find the angle (θ) between $\vec{A}$ and $\vec{B}$

__**Solution:**__

(A) $\vec{A} \bullet \vec{B} = (2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}) \bullet (-\hat{\imath} + 2\hat{\jmath})$

$= -2\hat{\imath} \bullet \hat{\imath} + 2\,\hat{\imath} \bullet 2\hat{\jmath} - 3\hat{\jmath} \bullet \hat{\imath} + 3\hat{\jmath} \bullet 2\hat{\jmath}$

$= -2 + 0 - 0 + 6 = 4$

(B) The magnitude of $\vec{A}$: $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$

The magnitude of $\vec{B}$: $B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$

$$\cos\theta = \frac{\vec{A} \bullet \vec{B}}{AB} = \frac{4}{\sqrt{13}\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{65}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{4}{\sqrt{65}} = 60.3°$$

3.5 Vector Product

(Given any two vectors $\vec{A}$ *and* $\vec{B}$, the vector product $(\vec{A} \times \vec{B})$ is defined as a third vector $\vec{C}$, which has a magnitude of $(ABsin\theta)$).

$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ Vector product

$C = ABsin\theta$ magnitude of vector product

- The vector product$(\vec{A} \times \vec{B})$ is also called (**cross product**).

Properties of the vector product:

1. It is not commutative $(\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A})$ Therefore, if you change the order of the vectors in a vector product, you must change the sign.
2. If $\vec{A}$ is parallel to $\vec{B}$ (θ = 0 or 180°), then

$$\vec{A} \times \vec{B} = 0 \quad \text{and} \quad \vec{A} \times \vec{A} = 0$$

3. If $\vec{A}$ is perpendicular to $\vec{B}$ (θ = 90°), then

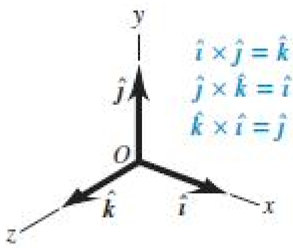
$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB$$

4. The vector product obeys the distributive law:

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

5. The derivative of the vector product with respect to some variable such as (t) is: $\frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B} + \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt}$

- The cross products of the unit vectors ($\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, and $\hat{k}$) obey the following rules: $\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$
- $\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}$, $\hat{\jmath} \times \hat{\imath} = -\hat{k}$
- $\hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath}$, $\hat{k} \times \hat{\jmath} = -\hat{\imath}$
- $\hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath}$, $\hat{\imath} \times \hat{k} = -\hat{\jmath}$



The cross product of any two vectors $\vec{A}$ *and* $\vec{B}$ can be expressed in the following determinant form:

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \hat{\imath}\begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} + \hat{\jmath}\begin{vmatrix} A_z & A_x \\ B_z & B_x \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath}\,(A_yB_z - A_zB_y) + \hat{\jmath}\,(A_zB_x - A_xB_z) + \hat{k}\,(A_xB_y - A_yB_x)$$

Example (3.3):

Two vectors lying in the (*xy* plane) are given by the equations:

$$\vec{A} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} \text{ and } \vec{B} = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$$

Find $\vec{A}\times\vec{B}$ and verify that ($\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$).

Solution:

$\vec{A}\times\vec{B} = (2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}\,) \times (-\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}\,)$

$= 2\hat{\imath} \times (-\hat{\imath}) + 2\,\hat{\imath} \times 2\hat{\jmath} + 3\hat{\jmath} \times (-\hat{\imath}\,) + 3\hat{\jmath} \times 2\hat{\jmath}$

$= 0 + 4\,\hat{k} + 3\,\hat{k} + 0 = 7\,\hat{k}$

To verify that $\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$:

$\vec{B}\times\vec{A} = (-\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}\,) \times (2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}\,)$

$= (-\hat{\imath}\,) \times 2\hat{\imath} + (-\hat{\imath}\,) \times 3\hat{\jmath} + 2\hat{\jmath} \times 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} \times 3\hat{\jmath}$

$= 0 - 3\hat{k} - 4\,\hat{k} + 0 = -\,7\,\hat{k}$

Therefore $\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$

Example (3.4):

Vector $\vec{A}$ has a magnitude of 6 units and it is in the direction of positive *x*- axis. Vector $\vec{B}$ has a magnitude of 4 units and lies in *xy*-plane making an angle 30° with *x*- axis. Find $\vec{A}\times\vec{B}$?

Solution:

$\vec{A} = 6\,\hat{\imath} + 0\,\hat{\jmath} + 0\,\hat{k}$

$\vec{B} = 4\,\hat{\imath}\cos 30 + 4\,\hat{\jmath}\,\sin 30 + 0\,\hat{k} = 2\sqrt{3}\,\hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath}$

$$\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 6 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 2 & 0 \end{vmatrix} = 12\,\hat{k}$$

Chapter 4

(Motion in Two Dimensions)

4.1 The Position, Velocity, and Acceleration Vectors

We begin by describing the position of the particle by its **position vector** ($\vec{\mathbf{r}}$), drawn from the origin of some coordinate system to the location of the particle in the (*xy* plane) as shown in the figure.

At time t_i, the particle is at point (A), described by position vector $\vec{\mathbf{r}}_i$.

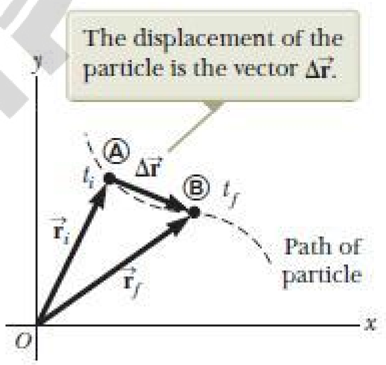
At some later time t_f , it is at point (B), described by position vector $\vec{\mathbf{r}}_f$.

The path from (A) to (B) is not necessarily a straight line. As the particle moves from (A) to (B) in the time interval ($\Delta t = t_f - t_i$), its position vector changes from $\vec{\mathbf{r}}_i$ to $\vec{\mathbf{r}}_f$.

We now define the **displacement vector** ($\Delta\vec{\mathbf{r}}$) for a particle as being (the difference between its final position vector and its initial position vector):

$$\Delta\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_i - \vec{\mathbf{r}}_f \qquad \textbf{Displacement vector} \qquad (4.1)$$

As we see from the figure, the magnitude of ($\Delta\vec{\mathbf{r}}$) is *less* than the distance traveled along the curved path followed by the particle.



- The **average velocity** ($\vec{\mathbf{v}}_{ave}$) of a particle during the time interval (Δt) as the displacement of the particle divided by the time interval:

$$\vec{\mathbf{v}}_{ave} = \frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta t} \qquad \textbf{Average velocity} \qquad (4.2)$$

- Multiplying or dividing a vector quantity by a positive scalar quantity such as (Δt) changes only the magnitude of the vector, not its direction. Because displacement is a vector quantity and the time interval is a positive scalar quantity, we conclude that the average velocity is a vector quantity directed along ($\Delta\vec{\mathbf{r}}$).

- The average velocity between points is independent of the path taken.
- The **instantaneous velocity** ($\vec{\mathbf{v}}$) is defined as (the limit of the average velocity $\frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta t}$ as Δt approaches zero):

$\vec{\mathbf{v}} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}$ **Instantaneous velocity** (4.3)

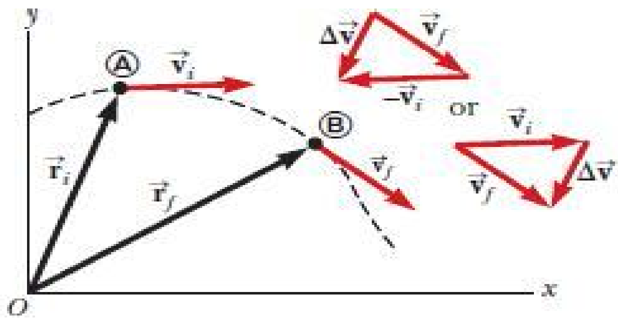
- The magnitude of the instantaneous velocity vector ($v = |\vec{\mathbf{v}}|$) of a particle is called the **speed** of the particle, which is a scalar quantity.
- The **average acceleration** ($\vec{a}_{ave}$) of a particle is defined as (the change in its instantaneous velocity vector **(**$\Delta\vec{\mathbf{v}}$) divided by the time interval Δt during which that change occurs):

$\vec{a}_{ave} = \frac{\Delta\vec{\mathbf{v}}}{\Delta t} = \frac{\vec{\mathbf{v}}_f - \vec{\mathbf{v}}_i}{t_f - t_i}$ **Average acceleration** (4.4)

Average acceleration is a vector quantity.

- The **instantaneous acceleration** ($\vec{a}$) is defined as (the limiting value of the ratio $\frac{\Delta\vec{\mathbf{v}}}{\Delta t}$ as Δt approaches zero):

$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{\mathbf{v}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}$ **Instantaneous acceleration** (4.5)



4.2 Two-Dimensional Motion with Constant Acceleration

Motion in two dimensions can be modeled as two *independent* motions in each of the two perpendicular directions associated with the x and y axes. That is, any influence in the y direction does not affect the motion in the x direction and vice versa.

The position vector for a particle moving in the xy plane can be written:

$$\vec{\mathbf{r}} = \hat{\imath}x + \hat{\jmath}y \qquad (4.6)$$

The velocity of the particle:

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \hat{\imath}\frac{dx}{dt} + \hat{\jmath}\frac{dy}{dt}$$

$$\vec{\mathbf{v}} = \hat{\imath}\, v_x + \hat{\jmath}\, v_y \qquad (4.7)$$

To determine the final velocity at any time t, we obtain:

$$\vec{\mathbf{v}}_f = (v_{ix} + a_x t)\,\hat{\imath} + (v_{iy} + a_y t)\,\hat{\jmath} = (v_{ix}\,\hat{\imath} + v_{iy}\,\hat{\jmath}) + (a_x\,\hat{\imath} + a_y\,\hat{\jmath})\, t$$

$\boxed{\vec{\mathbf{v}}_f = \vec{\mathbf{v}}_i + \vec{\mathbf{a}}\, t}$ Velocity vector as a function of time (4.8)

Similarly,

$x_f = x_i + v_{ix}\, t + \frac{1}{2} a_x t^2$ and $y_f = y_i + v_{iy}\, t + \frac{1}{2} a_y t^2$

Substituting these expressions into equation (4.6) (and labeling the final position vector ($\vec{\mathbf{r}}_f$) gives:

$$\vec{\mathbf{r}}_f = \left(x_i + v_{ix}\, t + \frac{1}{2} a_x t^2 \right)\hat{\imath} + \left(y_i + v_{iy}\, t + \frac{1}{2} a_y t^2 \right)\hat{\jmath}$$

$$= (x_i\,\hat{\imath} + y_i\,\hat{\jmath}) + (v_{ix}\,\hat{\imath} + v_{iy}\,\hat{\jmath})\, t + \frac{1}{2}(a_x\,\hat{\imath} + a_y\,\hat{\jmath})\, t^2$$

$\boxed{\vec{\mathbf{r}}_f = \vec{\mathbf{r}}_i + \vec{\mathbf{v}}_i t + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{a}}\, t^2}$ Position vector as a function of time (4.9)

Example (4.1):

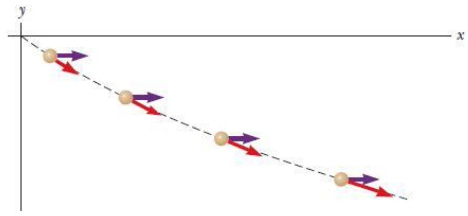
A particle moves in the xy plane, starting from the origin at ($t = 0$) with an initial velocity having an x - component of (20 m/s) and y- component of (-15 m/s). The particle experiences an acceleration in the x - direction, given by ($a_x = 4.0\ \text{m/s}^2$).

(A) Determine the total velocity vector at any time.

(B) Calculate the velocity and speed of the particle at (t = 5.0 s) and the angle the velocity vector makes with the x- axis.

(C) Determine the x and y coordinates of the particle at any time t and its position vector at this time.

Solution:



(A) The components of the initial velocity tell us that the particle starts by moving toward the right and downward.

The x- component of velocity starts at 20 m/s and increases by 4.0 m/s every second. The y - component of velocity never changes from its initial value of (-15 m/s).

$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}\,t = (\,v_{ix} + a_x\,t)\,\hat{\imath} + (\,v_{iy} + a_y\,t)\,\hat{\jmath}$

$\vec{v}_f = [20 + 4\,t]\,\hat{\imath} + [\,-15 + 0\,t\,]\,\hat{\jmath}$

$\vec{v}_f = [(20 + 4\,t)\,\hat{\imath} - 15\,\hat{\jmath}\,]$ m/s

(B) $\vec{v}_f = [(20 + 4\,t)\,\hat{\imath} - 15\,\hat{\jmath}\,] = [\,\{20 + 4(5)\}\,\hat{\imath} - 15\,\hat{\jmath}] = (40\,\hat{\imath} - 15\,\hat{\jmath})$ m/s

The angle θ: $\theta = \tan^{-1}\frac{v_{yf}}{v_{xf}} = \tan^{-1}\frac{-15}{40} = -21°$

The negative sign for the angle θ indicates that the velocity vector is directed at an angle of 21° below the positive x - axis.

The speed of the particle as the magnitude of $\vec{v}_f$:

$$v_f = |\vec{v}_f| = \sqrt{v_{xf}^2 + v_{yf}^2} = \sqrt{(40)^2 + (-15)^2}\ v_f = 43 \text{ m/s}$$

(C) $x_f = v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2$

$x_f = (\,20\,t + 2\,t^2\,)$ m

$y_f = v_{yi}t = (\,-15\,t\,)$ m

The position vector of the particle at any time t :

$$\vec{r}_f = (\,x_f\,\hat{\imath} + y_f\,\hat{\jmath}\,) = [(\,20\,t + 2\,t^2\,)\,\hat{\imath} - 15\,t\,\hat{\jmath}\,] \text{ m}$$

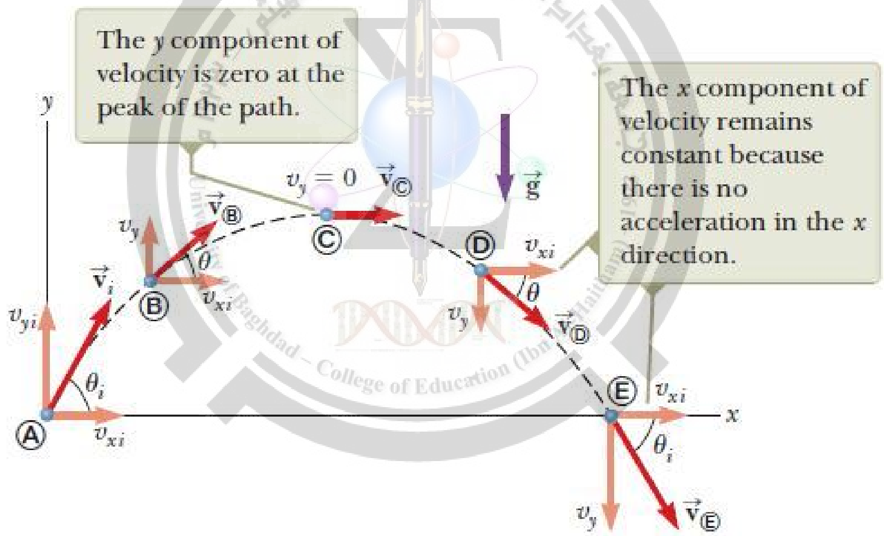
4.3 Projectile Motion

Anyone who has observed a baseball in motion has observed projectile motion. The ball moves in a curved path and returns to the ground. The path of a projectile, which we call its *trajectory*, is always a ***parabola***. The expression for the position vector of the projectile as a function of time follows directly from equation 4.9, with its acceleration being that due to gravity, $\vec{a} = \vec{g}$

$$\vec{\mathbf{r}}_f = \vec{\mathbf{r}}_i + \vec{\mathbf{v}}_i t + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{g}}\, t^2 \qquad (4.10)$$

Where the initial x and y components of the velocity of the projectile are:

$$v_{xi} = v_i \cos\theta_i \qquad\qquad v_{yi} = v_i \sin\theta_i$$



When analyzing projectile motion, model it to be the superposition of two motions: (1) motion of a particle under constant velocity in the horizontal direction and (2) motion of a particle under constant acceleration (free fall) in the vertical direction.

Horizontal Range and Maximum Height of a Projectile

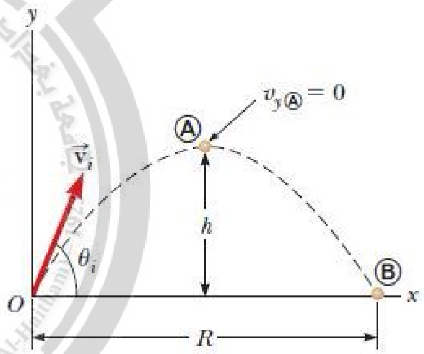
Let us assume a projectile is launched from the origin at $t_i = 0$ with a positive v_{yi} component as shown in figure above, and returns to the the same horizontal level. This situation is common in sports, where baseballs, footballs, and golf balls often land at the same level from which they were launched.

Two points in this motion are especially interesting to analyze:

- The peak point A, which has Cartesian coordinates ($R/2$, h), and
- The point B, which has coordinates (R, 0).
- The distance (R) is called the **horizontal range** of the projectile, and the distance (h) is its **maximum height.**

Let us find (h) and (R) mathematically in terms of v_i, θ_i, and g :

We can determine (h) by noting that at the peak v_{yA} =0. Therefore, we can use the y component of equation (4.8) to determine the time t_A at which the projectile reaches the peak:



$\vec{v}_{yf} = \vec{v}_{yi} + a_y t$

$0 = v_i \sin\theta i - g\, t_A$

$t_A = \frac{v_i \sin \theta i}{g}$

Substituting this expression for t_A into the y component of equation (4.9) and replacing $y = y_A$ with h, we obtain an expression for h in terms of the magnitude and direction of the initial velocity vector:

$$h = (v_i \sin\theta\, i)\left(\frac{v_i \sin \theta i}{g}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_i^2 \sin^2 \theta i}{g^2}\right)$$

$$\boxed{h = \frac{v_i^2 \sin^2 \theta i}{2g}} \quad \text{Maximum height for the projectile} \qquad (4.11)$$

- The range R is the horizontal position of the projectile at a time that is twice the time at which it reaches its peak, that is, at time ($t_B = 2t_A$).

Using the x component of equation (4.9), noting that:

$v_{xi} = v_{xB} = v_i \cos\theta\, i$, and setting $x_B = R$ at $t = 2t_A$, we find that:

$R = v_{xi}\, t_B = (v_i \cos\theta\, i)\,(2t_A)$

$R = (v_i \cos\theta\, i)\left(\frac{2v_i \sin\theta i}{g}\right) = \frac{2v_i^2 \sin\theta i \cos\theta i}{g}$

Using the identity $\sin 2\theta = 2sin\theta\, \cos\theta$, so

$\boxed{R = \frac{v_i^2 \sin 2\theta i}{g}}$ Horizontal range of the projectile (4.12)

The maximum value of R from equation (4.12) is:

$\boxed{R_{max} = \frac{v_i^2}{g}}$ because the maximum value of $(\sin 2\theta\, i = 1)$, which occurs when $2\theta i = 90°$. Therefore, <u>R is a maximum when $\theta i = 45°$.</u>

Example (4.2):

A long jumper leaves the ground at an angle of 20° above the horizontal and at a speed of 11.0 m/s.

(A) How far does he jump in the horizontal direction?

(B) What is the maximum height reached?

Solution:

(A): Use equation (4.12) to find the range of the jumper:

$$R = \frac{v_i^2 \sin 2\theta i}{g} = \frac{(11)^2 \sin(2X20°)}{9.8} = 7.94 \text{ m}$$

(B): The maximum height reached by using equation 4.11:

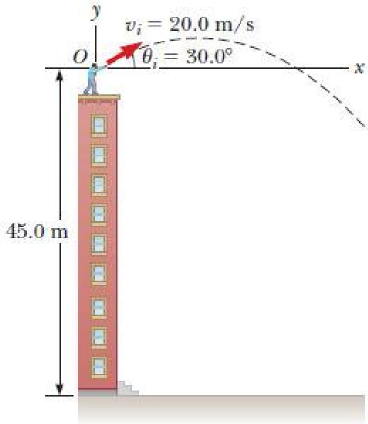
$$h = \frac{v_i^2\, sin^2\, \theta i}{2g} = \frac{(11)^2\, sin^2\, 20°}{2\,(9.8)} = 0.722 \text{ m}$$

Example (4.3):

A stone is thrown from the top of a building upward at an angle of (30°) to the horizontal with an initial speed of (20 m/s) as shown in the figure. The height from which the stone is thrown is (45 m) above the ground.

(A) How long does it take the stone to reach the ground?

Solution: (A) We have the information



$x_i = y_i = 0$, y_f = - 45 m, a_y = - g , and v_i = 20 m/s

The initial x and y components of the stone's velocity:

$v_{xi} = v_i \cos \Theta i$ = 20 cos 30° = 17.3 m/s

$v_{yi} = v_i \sin \Theta i$ = 20 sin 30° = 10 m/s

The vertical position of the stone from the vertical component:

$$y_f = y_i + v_{yi} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

$$-45 = 0 + 10\,t + \frac{1}{2}(-9.8)\,t^2$$

t = 4.22 s

(B)What is the speed of the stone just before it strikes the ground?

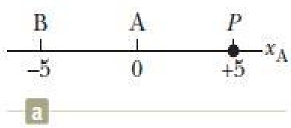
$$v_{yf} = v_{yi} + a_y t$$

$$= 10 + (-9.8)(4.22) = -31.3 \text{ m/s}$$

4.4 Relative Velocity

We describe how observations made by different observers in different frames of reference are related to one another. A frame of reference can be described by a Cartesian coordinate system for which an observer is at rest with respect to the origin.

Consider the two observers A and B along the number line in figure a.



Observer A is located at the origin of a one-dimensional x_A axis, while observer B is at the position x_A = -5. We denote the position variable as x_A because observer A is at the origin of this axis. Both observers measure the position of point P, which is located at x_A = +5. Suppose