الفصل الأول

المصفوفات *Matrices*

فهرس الفصل

في سنة 1855 قدم آرثر كايلي المصفوفة على أنها تمثيل لعناصر خطية، وهذه الفترة اعتبرت بداية الجبر الخطي ونظرية المصفوفات. وتُستخدم المصفوفات وتطبيقاتها في معظم المجالات العلمية، في كل فرع من فروع الفيزياء مثل الميكانيكية والبصريات الهندسية والكهرومغناطيسية

وميكانيكي الكم ولدراسة الظواهر الفيزيائية مثل حركة الأجسام الصلبة وأيضا في رسومات الكمبيوتر ومعالجة النماذج الثلاثية الأبعاد وعرضها على شاشة ثنائية الأبعاد، كما تستخدم في نظريات الاحتمالات والإحصاء، وفي الاقتصاد تستخدم لوصف أنظمة العلاقات الاقتصادية.

In 1855 Arthur Cayley introduced the matrix as a representation of linear elements, and this period is considered the beginning of linear algebra and matrix theory. Matrices and their applications are used in most scientific fields, in every branch of physics, such as mechanics, engineering optics, electromagnetism, quantum mechanics, and for studying physical phenomena such as the movement of solid bodies, as well as in computer graphics, processing three-dimensional models and displaying them on a two-dimensional screen, as well as in probability theories and statistics, and in economics is used to describe systems of economic relations.

1.1 تعاريــف *Definitions*

1.1.1 : Definition - تعريف

ليكن n و p عددان طبيعيان غير معدومين.

Let n and p be two non-zero natural numbers.

1) المصفوفة A هي جدول مستطيل من عناصر الحقل $\mathbb{K}$ اللذي يمكن أن يكون مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ أو المركبة $\mathbb{C}$.

The matrix A is a rectangular table of elements of the field $\mathbb{K}$ which can be the set of real numbers $\mathbb{R}$ or the complex $\mathbb{C}$.

2) A هي من الرتبة أو من الصنف $n{\times}p$ إذا كان الجدول متكون من n سطر و p عمود

A is of order or of class $n{\times}p$ if the table consists of n rows and p columns.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \qquad or \qquad A = (a_{ij})_{1\le i\le n;1\le j\le p}.$$

3) عناصر الجدول تسمى عوامل المصفوفة A.

The elements of the table are called the coefficients of the matrix A.

4) العامل المتواجد في وضعية تقاطع السطر i مع العمود j يرمز له بالرمز a_{ij}.
The coefficient at the intersection of the line i and the column j are denoted by a_{ij}.

1.1.1 : Example - مثال

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$$

هي مصفوفة من الصنف 3×2 أي ثلاثة أسطر وعمودين، و على سبيل المثال $a_{11} = 5$ و $a_{22} = 3$.
It is a matrix of class 3×2 i.e. three rows and two columns, for example $a_{11} = 5$ and $a_{22} = 3$.

2.1.1 : Example - مثال

.

1) المصفوفة — *The matrix*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 17 & 0 \\ \frac{1}{2} & \sqrt{5} & 5 \end{pmatrix}$$

هي مصفوفة 2×3 تتكون من سطرين وثلاثة أعمدة.
is a 2×3 matrix consisting of two lines and three columns.

2) a_{23} هو المعامل الموجود عند تقاطع السطر الثاني والعمود الثالث هو يساوي 5.
a_{23} is the coefficient at the intersection of the second line and the third column is equal to 5.

2.1.1 : Definition - تعريف

مجموعة المصفوفات التي تحتوي على n سطر و p عمود ذات المعاملات في $\mathbb{K}$ يرمز لها بالرمز $M_{n,p}(\mathbb{K})$. و عناصر الفضاء الشعاعي $M_{n,p}(\mathbb{R})$ تسمى مصفوفات حقيقية.
The matrix set containing n line and p column with coefficients in $\mathbb{K}$ denoted by $M_{n,p}(\mathbb{K})$.
The vector space elements of $M_{n,p}(\mathbb{R})$ are called real matrices.

1.1.1 مصفوفات خاصة Special matrices

فيما يلي بعض أنواع المصفوفات المثيرة للاهتمام:

Here are some interesting types of matrices:

1) إذا كان $n = p$ (عدد الأسطر مساوي لعدد الأعمدة)، في هذه الحالة نقول عن المصفوفة أنها مربعة عندها نرمز لمجموعة المصفوفات بالرمز $M_n(\mathbb{K})$ بدل الرمز $M_{n,n}(\mathbb{K})$.

If $n = p$ (the number of rows is equal to the number of columns), in this case we say that the matrix is square, then we denote the set of matrices by $M_n(\mathbb{K})$ instead of $M_{n,n}(\mathbb{K})$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

العناصر $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ تشكل قطر المصفوفة.

The elements $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ make up the diagonal of the matrix.

2) إذا كان $p = 1$ ، فإن A عبارة عن مصفوفة عمود:

If p=1, then A is a column matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

3) إذا كان $n = 1$ ، فإن A عبارة عن مصفوفة سطر:

If $n = 1$, then A is a line matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \end{pmatrix}.$$

4) المصفوفة (من الصنف $n \times p$) التي تكون جميع معاملاتها أصفارا تسمى المصفوفة الصفرية أو المعدومة ويرمز لها بالرمز $0_{n,p}$ أو أكثر ببساطة 0. في حساب المصفوفة، تلعب المصفوفة الصفرية دور الرقم 0 بالنسبة للأعداد الحقيقية.

A matrix (of class $n \times p$) whose coefficients are all zeros is called a zero, or zero-matrix and is denoted by $0_{n,p}$ or more simply 0. In matrix arithmetic, the zero matrix plays the role of the number 0 for real numbers.

3.1.1 : Example - مثال

.

The matrix — 1) المصفوفة

$$M = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

is a column matrix. — هي مصفوفة عمود.

The matrix — 2) المصفوفة

$$N = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

is a line matrix. — هي مصفوفة سطر.

The matrix — 3) المصفوفة

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 6 \\ -4 & 0 & \pi \end{pmatrix}$$

it is a square matrix of order 3. — هي مصفوفة مربعة من الرتبة 3.

The matrix — 4) المصفوفة

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

is the zero matrix or the null matrix. — هي مصفوفة صفرية أو المصفوفة المعدومة.

تسمى المصفوفة المربعة التالية بمصفوفة الوحدة

The next square matrix is called the unity matrix

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

عناصرها القطرية تساوي 1 وجميع عناصرها الأخرى تساوي 0. ونرمز لها بالرمز I_n أو ببساطة بالرمز I.

Its diagonal elements are 1 and all its other elements are 0. We denote it by I_n or simply by I

في حساب المصفوفة ، تلعب مصفوفة الوحدة دورا مشابها لدور الرقم 1 بالنسبة للأعداد الحقيقية. فهو العنصر الحيادي بالنسبةلعملية الجداء.

In matrix arithmetic, the unit matrix plays a role similar to that of the number 1 for real numbers. It is the neutral element for the multiplication.

1.1.1 : Proposition - قضية

إذا كانت A مصفوفة من الصنف $n{\times}p$ فإن

If A is a matrix of class $n{\times}p$ then

$$I_n \cdot A = A \qquad and \qquad A \cdot I_p = A.$$

5) **تكون المصفوفة A المربعة تناظرية إذا كانت مساوية لمنقولها، أي إذا كان:**

The matrix A squared is symmetric if it is equal to its transpose, that is, if we have:

$$A = A^T,$$

أو إذا كان $a_{ij} = a_{ji}$ من أجل كل $i, j = 1, \dots, n$. بصورة أخرى، تكون معاملات المصفوفة متناظرة بالنسبة للقطر.

or if $a_{ij} = a_{ji}$ for all $i, j = 1, \dots, n$. In other words, the coefficients of the matrix are symmetric with respect to the diagonal.

4.1.1 : Example - مثال

المصفوفات التالية مصفوفات متناظرة:

The following matrices are symmetrical matrices:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

6) و تكون المصفوفة A المربعة ضد تناظرية إذا كان:

A square matrix A is antisymmetric if we have:

$$A^T = -A,$$

أو إذا كان $a_{ij} = -a_{ji}$ من أجل كل $i, j = 1, \dots, n$.

or if $a_{ij} = -a_{ji}$ for all $i, j = 1, \dots, n$.

5.1.1 : Example - مثال

$$\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 4 & 9 \\ -4 & 1 & -3 \\ -9 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

2.1.1 Equal matrices تساوي مصفوفات

ليكن n و p عددان طبيعيان غير معدومين. ولتكن المصفوفتين A و B من نفس الصنف $n \times p$.

Let n and p be non-null natural numbers and let the matrices A and B be of the same class $n \times p$.

3.1.1 : Definition - تعريف

نقول أن المصفوفتين A و B متساويتين إذا كانت العناصر المتناظرة فيهما متساوية ونكتب:

We say that the two matrices A and B are equal if their corresponding elements are equal *and we write:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \forall i, j : a_{ij} = b_{ij}$$

6.1.1 : Example - مثال

Let the two matrices be A and B where

لتكن المصفوفتين A و B حيث

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} & \pi \\ 2i & 7 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

We say that A is equal to B if

نقول أن A تساوي B إذا كان

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} & \pi \\ 2i & 7 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} = 2, \quad a_{12} = \sqrt{3}, \quad a_{13} = \pi, \\ a_{21} = 2i, \quad a_{22} = 7, \quad a_{23} = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

2.1.1 : Proposition - قضية

المصفوفتان $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ من الصنف $n \times p$ متساويتان إذا وفقط إذا كان $a_{ij} = b_{ij}$ من أجل كل i, j.

The two matrices $A = (a_{ij})$ and $B = (b_{ij})$ of class $n \times p$ are equal if and only if $a_{ij} = b_{ij}$ for each i, j.

2.1 حساب على المصفوفات *Calculation on matrices*

1.2.1 جداء مصفوفة بسلمي Product of a matrix by a scalar

3.2.1 : Proposition - قضية

إذا كان لدينا المصفوفة $A = (a_{ij})$ و العدد الحقيقي أو السلمي $\lambda \in \mathbb{R}$، نعرف λA بالمصفوفة $C = (c_{ij})$ حيث $c_{ij} = \lambda a_{ij}$ من أجل كل i, j.

If we have the matrix $A = (a_{ij})$ and the real or scalar $\lambda \in \mathbb{R}$, we define λA by the matrix $C = (c_{ij})$ where $c_{ij} = \lambda a_{ij}$ for each i, j.

7.2.1 : Example - مثال

لتكن المصفوفة — *Let the matrix*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix},$$

ومنه — *then*

$$-2 \times A = \begin{pmatrix} -2 \times \frac{1}{2} & -2 \times 1 \\ -2 \times 0 & -2 \times (-\frac{3}{4}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

2.2.1 جمع المصفوفات Matrices addition

4.2.1 : Proposition - قضية

إذا كان لدينا $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ مصفوفتين $n \times p$ نعرف مجموع المصفوفتين $A + B$ هو المصفوفة $C = (c_{ij})$ من الصنف $n \times p$ حيث $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ من أجل كل i, j.

If we have $A = (a_{ij})$ and $B = (b_{ij})$ two matrices $n \times p$ we define the sum of the two matrices denoted by $A + B$ is the matrix $C = (c_{ij})$ of class $n \times p$ where $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ for each i, j.

8.2.1 : Example - مثال

مجموع مصفوفتان من الصنف 2×3 : — *The sum of two matrices of class 2×3 :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0-1 & -1-2 \\ 2-3 & 1-1 & 4+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

5.2.1 : Proposition - قضيـة

لتكن A، B و C ثلاث مصفوفات من المجموعة $M_{n,p}(\mathbb{K})$، و ليكن $\alpha \in \mathbb{K}$ و $\beta \in \mathbb{K}$ سلميين.

Let A, B and C be three matrices of the set $M_{n,p}(\mathbb{K})$, and let $\alpha \in \mathbb{K}$ and $\beta \in \mathbb{K}$ be a scalars.

1) الجمع تبديلي: *The addition is commutative:*

$$A + B = B + A,$$

2) الجمع تجميعي: *The addition is associative:*

$$A + (B + C) = (A + B) + C,$$

3) المصفوفة المعدومة هي العنصر الحيادي بالنسبة للجمع في مجموعة المصفوفات:

The null matrix is the neutral element with respect to addition in the set of matrices:

$$A + 0 = A,$$

4) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A,$

5) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B.$

9.2.1 : Example - مثال

Let لتكن

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{then} \quad A + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

But, if: لكن إذا كان:

$$C = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$A + C$ is undefined. فإن $A + C$ غير معرف

3.2.1 جداء المصفوفات Product of matrices

6.2.1 : Proposition - قضية

لتكن $A=(a_{ij})$ من الصنف $n \times p$ و $B=(b_{jk})$ من الصنف $p \times q$ نعرف الجداء $A \times B$ (الذي نرمز له أيضا بالرمز AB) المصفوفة $C=(c_{ik})$ المعرفة كما يلي:

Let $A=(a_{ij})$ be of class $n \times p$ and $B=(b_{jk})$ be of class $p \times q$ we define the product $A \times B$ (which is also denoted by AB) of the matrix $C=(c_{ik})$ knowledge as follows:

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{p} a_{ij}b_{jk}, \quad \forall i,k: \; 1 \leq i \leq n \;\; and \;\; 1 \leq k \leq q.$$

يمكننا كتابة المعامل بطريقة أكثر تحليلا وهي:

We can write the coefficient in a more analytical way:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ik}b_{kj}+\cdots+a_{ip}b_{pj}.$$

1.2.1 : Remark - ملاحظة

يكون الجداء معرف فقط إذا كان عدد الأعمدة في A يساوي عدد الأسطر في B. لهذا جداء المصفوفات بصفة عامة ليس تبديلي.

A product is defined only if the number of columns in A equals the number of rows in B. This is why the multiplication of matrices is generally not commutative.

10.2.1 : Example - مثال

لتكن *Let*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

نبدأ أولاً الجداء بشكل صحيح : صنف المصفوفة التي تم الحصول عليها هو 2×2.

First we multiply correctly: the class of the obtained matrix is 2×2.

ثم نحسب كل من المعاملات ، بدءا من المعامل الأول

Then we calculate each of the coefficients, starting with the first one

$$c_{11} = 1\times1 \ + \ 2\times(-1) \ + \ 3\times1 = 2$$

then the rest ثم البقية

$$\begin{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} & \begin{pmatrix} \color{red}{1} & 2 \\ \color{red}{-1} & 1 \\ \color{red}{1} & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \color{red}{1} & \color{red}{2} & \color{red}{3} \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \color{blue}{2} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 11 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

11.2.1 : Example - مثال

$$\begin{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cdot & c_{12} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \end{matrix}$$

We have: لدينا إذا:

$$c_{12} = 1\times1 + 2\times2 - 1\times3 = 2.$$

بنفس الطريقة مع باقي عناصر المصفوفة نتحصل على :

in the same way with the rest of the matrix elements, we get:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -3 & 10 & 4 \end{pmatrix}$$

يمكن أن يكون حاصل ضرب مصفوفتين غير معدومتين هو صفر. بمعنى آخر ، يمكن أن يكون لدينا $A \neq 0$ **و** $B \neq 0$ **لكن** $AB = 0$.

The product of two non-null matrices can be zero. In other words, we could have $A \neq 0$ and $B \neq 0$ but $AB = 0$.

12.2.1 : Example - مثال

Let لتكن

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad so \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.2.1 : Remark - ملاحظة

$AB = AC$ لا يعني $B = C$. يمكن الحصول $AB = AC$ و $B \neq C$.

$AB = AC$ does not mean $B = C$. $AB = AC$ and $B \neq C$ can be obtained.

13.2.1 : Example - مثال

Let لتكن

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad so \quad AB = AC = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}.$$

Properties خواص

7.2.1 : Proposition - قضيــة

.

1) الجداء تجميعي: *The product is associative:*

$$A(BC) = (AB)C.$$

2) الجداء توزيعي على الجمع: *The product is distributive on addition:*

$$A(B + C) = AB + AC \quad and \quad (B + C)A = BA + CA$$

3)

$$A \cdot 0 = 0 \quad and \quad 0 \cdot A = 0.$$

4.2.1 Transposed matrix منقول مصفوفة

4.2.1 : Definition - تعريف

هي مصفوفة مشتقة من مصفوفة معلومة بجعل أسطرها أعمدة وأعمدتها أسطر أي تبديل الأسطر بالأعمدة والأعمدة بالأسطر بالطريقة التالية :

It is a matrix derived from a known matrix by making its lines into columns and its columns as lines, i.e. replacing lines with columns and columns with lines in the following way:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & b_{21} \\ a_{12} & b_{22} \\ a_{13} & b_{23} \end{pmatrix},$$

ونرمز لمنقول مصفوفة A بالرمز A^T.

and we denote the A matrix transpose by A^T.

3.2.1 : Remark - ملاحظة

منقول مصفوفة من الصنف $n \times p$ ينتج مصفوفة جديدة من الصنف $p \times n$.

The transpose of a matrix of class $n \times p$ produces a new matrix of class $p \times n$.

14.2.1 : Example - مثال

لدينا

We have

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ -7 & 8 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Properties خواص

1.2.1 : Theorem - نظرية

- $(A+B)^T = A^T + B^T$.
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$.
- $(A^T)^T = A$.
- $(AB)^T = B^T A^T$.
- إذا كانت A عكوسة فإن A^T عكوسة أيضا ولدينا:

If A is invertible, then A^T is also invertible and we have:

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

3.1 المصفوفات المربعة *Square matrices*

المصفوفات التي سوف ندرسها فيما يأتي هي مصفوفات مربعة من $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
The matrices we will study in the following are square matrices of $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1.3.1 أثر مصفوفة Matrix trace

في حالة مصفوفة مربعة من الصنف $n \times n$، تسمى العناصر $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ العناصر القطرية.
In the case of a square matrix of type $n \times n$, the elements $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ are called diagonal elements.

$$\begin{pmatrix} \color{red}{a_{11}} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \color{red}{a_{22}} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \color{red}{\ddots} & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & \color{red}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

5.3.1 : Definition - تعريف

أثر المصفوفة A هو حاصل جمع العناصر القطرية للمصفوفة A. بعبارات أخرى:

The trace of the matrix A is the sum of the diagonal elements of the matrix A. in other words:

$$\boxed{\boldsymbol{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.}$$

15.3.1 : Example - مثال

- إذا كان لدينا — *If we have*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},$$

فإن — *then*

$$\boldsymbol{tr}(A) = 2 + 5 = 7.$$

- من أجل — *for*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 8 \\ 11 & 0 & -10 \end{pmatrix}, \ \textit{then} \ \boldsymbol{tr}(B) = 1 + 2 - 10 = -7.$$

Properties خواص

2.3.1 : Theorem - نظرية

لتكن A و B مصفوفتين من الصنف $n \times n$. ومنه :

Let A and B be matrix of class $n \times n$. Including:

- $\boldsymbol{tr}(A + B) = \boldsymbol{tr}(A) + \boldsymbol{tr}(B)$،
- $\boldsymbol{tr}(A^T) = \boldsymbol{tr}(A)$،

- $\boldsymbol{tr}(AB) = \boldsymbol{tr}(BA)$،
- من أجل كل $\alpha \in \mathbb{K}$، *for every* $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$\boldsymbol{tr}(\alpha A) = \alpha \boldsymbol{tr}(A)$$

2.3.1 محدد مصفوفة مربعة Square matrix determinant

محدِّد مصفوفة مربعة هي قيمة عددية تُعطينا معلومات موجزة عن المصفوفة، مثل إذا ما كانت قابلة للعكس، ومن المُفيد أن نعرف هذه المعلومات قبل محاولة إجراء أيِّ عملية جبرية تتضمّن المصفوفة. حيث نفضِّل دائما تقليل عدد العمليات الحسابية التي نحتاجها لتحقيق ذلك.

The determinant of a square matrix is a numerical value that gives brief information about the matrix, such as whether it is invertible. It is useful to know this information before attempting to perform any algebraic operation involving the matrix. We always prefer to reduce the number of mathematical operations that we need to achieve this.

فيما يلي، نعتبر المصفوفات ذات المعاملات في حقل تبديلي $\mathbb{K}$، يمكن أن يكون $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ أو $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. وسوف نشرح كيفية حساب محدد المصفوفة بأبعاد صغيرة.

In the following, we consider matrices with coefficients in a commutative field $\mathbb{K}$, which can be $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. We will explain how to calculate the determinant of a matrix with small dimensions.

6.3.1 : Definition - تعريف

لتكن المصفوفة المربعة A من $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ حيث

Let the square matrix A *of* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *where*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

نسمي محدد المصفوفة A العدد من $\mathbb{K}$ الذي نرمز له بالرمز $\det(A)$ او $|A|$ و نكتب:

We call the number in $\mathbb{K}$ *which we denote by* $\det(A)$ *or* $|A|$ *with the determinant of the matrix* A

and write:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

سوف نُوَضِّح عدة خواص أساسية للمحددات. في كل مرة سنقدم توضيحات بسيطة لكل مفهومٍ جديد، عند حساب قيمة محدد لمصفوفة 4×4 أو أعلى من ذلك نكون بحاجة إلى إجراء عدد من العمليات الحسابية المطلوبة. ومن ثَم، سنكتفِي فقط باستخدام مصفوفات من الرتبة 2×2 أو 3×3. وقبل البدء، سنراجع باختصار كيفية حساب قِيَم محددات هذين النوعين من المصفوفات، بدءا بالمصفوفات من الرتبة 2×2 .

We will demonstrate several key properties of determinants. Each time we will give simple explanations for each new concept, when calculating the value of the determinant of 4×4 or higher we need to perform a number of required calculations. So we'll just use 2×2 or 3×3 matrices. Before we get started, we'll briefly review how to compute the values of the determinants of these two types of matrices, starting with 2×2 .

Determinant from dimension 2 and 3 محدد من البعد 2 و 3

في البعد 2 ، من السهل جدا حساب المحدد حيث تحسَب قيمة محدد المصفوفة من الرتبة 2×2 على النحو الآتي:

In dimension 2, it is very easy to compute the determinant as the value of the determinant of the matrix of order 2×2 is computed as follows:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

More clearly, the process is as follows: بصورة أوضح تتم العملية بالشكل التالي:

$$-a_{21}a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$+a_{11}a_{22}$$

على عكس المصفوفة من الرتبة 2×2، فعند حساب قيمة محدد مصفوفة من رتبة أعلى، يُوجد أكثر من خيار لمتابعة العملية الحسابية.

Unlike the 2×2 matrix, when calculating the determinant of a higher-order matrix, there is more than one option to proceed with the calculation.

لتكن $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ مصفوفة 3×3:

Let $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ be a $3 matrix$×3:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

تكون صيغة المحدد كالآتي:

The formula for the determinant is as follows:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

هناك طريقة أخرى سهلة، وهي طريقة ساروس والتي لا تصلح إلا للمصفوفات من الرتبة الثالثة فقط:

There is another easy method, which is Saros's method, which only works for 3rd order matrices:

نقوم بنسخ أول عمودين على يمين المصفوفة (الأعمدة الحمراء والزرقاء)، ثم نجمع حاصل ضرب ثلاثة حدود بتجميعها حسب الاتجاه للقطر النازل (إلى اليسار)، ثم نطرح حاصل ضرب ثلاثة حدود مجمعة حسب اتجاه القطر الصاعد (يمين).

We copy the first two columns to the right of the matrix (the red and blue columns), then add the product of three terms by grouping them by the direction of the descending diagonal (left), then subtract the product of the three terms grouped by the direction of the upward diagonal (right).

$$\begin{array}{|ccc|cc} & & & - \quad - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & & & + \quad + & + \end{array}$$

16.3.1 : Example - مثال

لنحسب محدد المصفوفة

Let's calculate the determinant of the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

.

بحسب طريقة ساروس:

According to the Sarros method:

$$\det(A) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right.$$

$$\det A = 2\times(-1)\times1 + 1\times3\times3 + 0\times1\times2$$
$$- 3\times(-1)\times0 - 2\times3\times2 - 1\times1\times1 = -6.$$

Properties خواص

3.3.1 : Theorem - نظرية

لتكن A و B مصفوفتين من الصنف $n\times n$. ومنه :

Let A and B be a two matrices of class $n\times n$. Then:

- $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$،
- $\det(A^T) = \det(A)$،

- $\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$،
- $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.
- من أجل كل $\alpha \in \mathbb{K}$، *for every* $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$\det(\alpha A) = \alpha \det(A)$$

3.3.1 المصفوفات المتشابهة Similar matrices

7.3.1 : Definition - تعريف

لتكن A و B مصفوفتين من المجموعة $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. نقول أن المصفوفة B شبيهة للمصفوفة A إذا وجدت مصفوفة عكوسة $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ حيث:

Let A and B be matrices of the set $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. *We say that the matrix B is similar to the matrix A if there is an inverse matrix* $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *where:*

$$B = P^{-1}AP.$$

يمكن أن نبرهن بسهولة أن العلاقة التالية هي علاقة تكافؤ على المجموعة $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

We can easily prove that the following relation is an equivalence relation on the set $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{K}) : \quad A\mathscr{R}B \Longleftrightarrow A \text{ شبيهة بالمصفوفة Similar to } B$$

- العلاقة إنعكاسية : المصفوفة A شبيهة لنفسها.

Reflexive: the matrix A is similar to itself.

- العلاقة تناظرية : إذا كانت A شبيهة للمصفوفة B فإن B شبيهة للمصفوفة A.

Symmetric: if A is similar to the matrix B then B is similar to the matrix A.

- العلاقة متعدية : إذا كانت A شبيهة للمصفوفة B و B شبيهة للمصفوفة C فإن A شبيهة للمصفوفة C.

Transitive: if A is similar to the matrix B and B is similar to the matrix C then A is similar to the matrix C.

نقول حين إذ أن المصفوفتين A و B متشابهتين.

We say when since the two matrices A and B are similar.

ملاحظة - Remark : 4.3.1

مصفوفتان متشابهتان فهما تمثلان نفس التطبيق الخطي الذاتي (الأندومورفيزم)، لكن يتم التعبير عنها في أساسات مختلفة.

Two matrices are similar then they represent the same endomorphism, but are expressed in different bases.

4.3.1 مقلوب مصفوفة Matrix inverse

تعريف - Definition : 8.3.1

لتكن A مصفوفة مربعة من الدرجة n. إذا وجدة مصفوفة مربعة B من الدرجة n حيث:

Let A be a square matrix of degree n. If there is a square matrix B of degree n where:

$$AB = I \qquad \text{and} \qquad BA = I,$$

نقول أن A عكوسة. ونسمي B مقلوب المصفوفة A. ونرمز له بالرمز A^{-1}.

We say that A is invertible and we call B the inverse of the matrix A we denote it by A^{-1}.

ملاحظة - Remark : 5.3.1

يكفي في الواقع التحقق من شرط واحد فقط من الشروط التالية $AB = I$ أو $BA = I$.

In fact, it is sufficient to check only, the following conditions $AB = I$ or $BA = I$.

- بصفة عامة إذا كانت A عكوسة، من أجل كل $p \in \mathbb{N}$ نلاحظ :

In general, if A is inverse, for every $p \in \mathbb{N}$ we note:

$$A^{-p} = (A^{-1})^p = \underbrace{A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}}_{\text{مرة } p \text{ time}}.$$

- مجموعة المصفوفات العكوسة من $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ يرمز له بالرمز $GL_n(\mathbb{K})$.

The set of inverse matrices $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ is denoted by $GL_n(\mathbb{K})$.

Inverse of a matrix by comparison method مقلوب مصفوفة باستعمال طريقة المقارنة

17.3.1 : Example - مثال

Let لیكن

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ندرس قابلية قلب المصفوفة A أي وجدانية المصفوفة

We study the invertibility of the matrix A, that is, the affectivity of the matrix

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ذات المعاملات من $\mathbb{K}$ حيث $AB = I$ و $BA = I$. في حين $AB = I$ تكافئ :

with coefficients in $\mathbb{K}$ where $AB = I$ and $BA = I$. while $AB = I$ is equivalent to :

$$AB = I \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

This equality is equivalent to the system: هذه المساواة تعادل الجملة :

$$\begin{cases} a + 2c = 1 \\ b + 2d = 0 \\ 3c = 0 \\ 3d = 1 \end{cases}$$

حلها هو : $a = 1$، $b = -\frac{2}{3}$، $c = 0$، $d = \frac{1}{3}$. ومنه المصفوفة

Its solution is: $a = 1$, $b = -\frac{2}{3}$, $c = 0$, $d = \frac{1}{3}$. Then, the matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

لإثبات أنها مناسبة، من الضروري أيضا التحقق من المساواة $BA = I$. ومنه المصفوفة A علوسة ومقلوبها

To prove that they are suitable, it is also necessary to check the equality $BA = I$. The matrix A

is invertible and his inverse is

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Inverse of a matrix by Gauss method مقلوب مصفوفة باستعمال طريقة غـوص

تتمثل هذه الطريقة من تنفيذ عدة عمليات أولية على أسطر المصفوفة A حتى تحويلها إلى مصفوفة الوحدة I. حيث يتم تنفيذ نفس العمليات الأولية في وقت واحد بدءا من المصفوفة I. ثم ننتهي بمصفوفة قيمتها A^{-1}. سنوضح ذلك بأمثلة سهلة للفهم أكثر.

This method consists in performing several preliminary operations on the lines of the matrix A until it is converted into the unit matrix I. Where the same initial operations are performed simultaneously starting with the matrix I. Then we end up with a matrix A^{-1}. We will explain this with easy-to-understand examples.

عمليا ، نقوم بكلتا العمليتين في نفس الوقت من خلال اعتماد الترتيب التالي: بجانب المصفوفة A التي نريد قلبها ، نضيف مصفوفة الوحدة لتشكيل المصفوفة المعززة $(A \mid I)$.

Practically, we do both operations at the same time by adopting the following order: next to the matrix A that we want to invert, we add the unity matrix to form the augmented matrix $(A \mid I)$.

على أسطر هذه المصفوفة، يتم تنفيذ العمليات الأولية حتى الحصول على الجدول $(I \mid B)$. فنحصل على $B = A^{-1}$.

On the lines of this matrix, the initial operations are performed until the table $(I \mid B)$ is obtained. We get $B = A^{-1}$.

سوف نتبع العمليات التالية على الأسطر :

We will follow the following operations on the lines:

1) **يمكننا ضرب أي سطر في عدد حقيقي غير معدوم (أو أي عنصر من $\mathbb{K} \setminus \{0\}$).**

We can multiply any line by a non-zero real number (or any element of $\mathbb{K} \setminus \{0\}$).

$$L_i \leftarrow \lambda L_i, \lambda \neq 0$$

2) **يمكننا أن نضيف إلى السطر L_i مضاعف من مضاعفات سطر آخر L_j.**

We can add to line L_i a multiple of another line's L_j.

$$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j, \lambda \in \mathbb{K} : (j \neq i)$$

3) يمكننا مبادلة سطرين.

We can exchange two lines.

$$L_i \leftrightarrow L_j.$$

6.3.1 : Remark - ملاحظة

تذكرأن كل ما تفعله على الجانب الأيسر من المصفوفة المعززة، عليك القيام به في الجانب الأيمن أيضا.

Remember that whatever you do on the left side of the augmented matrix, you have to do on the right side as well.

18.3.1 : Example - مثال

نحسب مقلوب المصفوفة التالية:

We calculate the inverse of the following matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

المصفوفة المعززة بأسطر مرقمة:

The augmented matrix with numbered lines:

$$(A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

نطبق طريقة غوص لجعل 0 يظهر في العمود الأول، أولاً في السطر الثاني بواسطة العملية الأولية $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$ مما يؤدي إلى المصفوفة المعززة:

We apply a Gauss method to make 0 appear in the first column, first in the second line by the initial operation $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$ which leads to the augmented matrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \color{red}{0} & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ \\ \end{array}$$

ثم 0 في العمود الأول، و في السطر الثالث ، بالتحويل $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$:

Then 0 in the first column, and in the third line, by transforming $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \color{red}{0} & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ \color{red}{0} & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)_{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}$$

نضرب السطر L_2 في العدد $-1/8$ كي نحصل على 1 :

We multiply the line L_2 by the number $-1/8$ to get 1 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \color{red}{0} & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ \color{red}{0} & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) L_2 \leftarrow -\tfrac{1}{8} L_2$$

نستمر في العملية كي نجعل 0 يظهر في كل الأماكن تحت القطر، حتى ننتهي من الجزء الأول من طريقة غوص:

We continue the process to make 0 appear everywhere under the diagonal, until we've finished with the first part of the sink method:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \color{red}{0} & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)_{L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2}$$

then ثم

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right)_{L_3 \leftarrow 2L_3}$$

كل ما تبقى هو الجزء الثاني من طريقة غوص و هو الصعود لجعل الأصفار تظهر فوق القطر:

All that's left is the second part of the Gauss method which is to go up to make the zeros appear above the diagonal:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \color{red}{0} & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) L_2 \leftarrow L_2 - \tfrac{5}{8} L_3$$

then   ثم

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 - L_3$$

وبالتالي، فإن مقلوب المصفوفة A هو المصفوفة التي تم الحصول عليها على اليمين وبعد اخراج المقدار $\frac{1}{4}$ كعامل مشترك نتحصل على:

So, the inverse of the matrix A is the matrix obtained on the right and after taking out the expression $\frac{1}{4}$ as a common factor we get:

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 7 & -3 & -5 \\ -8 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

وأخيرا، كي نطمئن على الحسابات، يكفي أن نتحقق من أن $A \times A^{-1} = I$.

Finally, to be sure of the calculations, it is enough to check that $A \times A^{-1} = I$.

Inverse of a matrix by adjoint matrix مقلوب مصفوفة باستعمال مرافق المصفوفة

9.3.1 : Definition - تعريف

Let the matrix A where: لتكن المصفوفة A حيث:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

نقوم بإنشاء المصفوفة A_{ij} بحذف العمود j الملون باللون الأحمر وحذف السطر i الملون باللون الأزرق من المصفوفة السابقة، فنحصل على مصفوفة من الرتبة $n-1$.

We create the matrix A_{ij} by deleting the column j colored in red and deleting the line i colored *in blue from the previous matrix, so we get a matrix of order $n-1$.*

$$A_{ij}=\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

نسمي مصفوفة مرافقة للمصفوفة A ونرمز لها بالرمز A^* المصفوفة

We call the adjoint matrix of the matrix A and we denote it by A^* the matrix

$$A^*=\left((-1)^{i+j}\det(A_{ij})\right)_{i,j\le n}=\begin{pmatrix} +\det(A_{11}) & -\det(A_{12}) & +\det(A_{13}) & -\det(A_{14}) & \cdots \\ -\det(A_{21}) & +\det(A_{22}) & -\det(A_{23}) & +\det(A_{24}) & \cdots \\ +\det(A_{31}) & -\det(A_{32}) & +\det(A_{33}) & -\det(A_{34}) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

19.3.1 : Example - مثال

Let the matrix be A where: لتكن المصفوفة A حيث:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

From which the adjoint matrix is: ومنه المصفوفة المرافقة هي:

$$A^*=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

4.3.1 : Theorem - نظرية

تكون المصفوفة المربعة A عكوسة أو قابلة للقلب إذا وفقط إذا كانت قيمة $\det(A) \neq 0$. و إذا كانت المصفوفة A عكوسة، فإن

The square matrix A is invertible if and only if $\det(A) \neq 0$.

If the matrix A is inverse, then

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (A^*)^T.$$

20.3.1 : Example - مثال

لتكن المصفوفة A من المثال السابق:

Let the matrix A from the previous example be:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

مصفوفتها المرافقة هي:

Its adjoint matrix is:

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

ومنه منقول المصفوفة هو:

Its transpose matrix is:

$$(A^*)^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

في الأخير مقلوب المصفوفة A هو:

Finally the inverse of the matrix A is:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (A^*)^T = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$