الفصل الثاني

تقطير مصفوفة *Matrix diagonalization*

فهرس الفصل

تقطير مصفوفة هو عملية أساسية في مجموعة المصفوفات. في هذا الفصل سنقوم بتحديد الشروط اللازمة كي تكون المصفوفة قابلة للتقطير. لهذا سنأخذ بعين الإعتبار مفاهيم الفصل السابق للتطبيقات الخطية.

Matrix diagonalization is a basic process in Matrices set. In this chapter we will define the conditions necessary for the matrix to be diagonalizable For this we will consider the concepts of the previous chapter for linear applications.

في هذا الفصل ، E هو فضاء شعاعي ذو بعد منته، على الحقل التبديلي $\mathbb{K}$.

In this chapter, E is a finite-dimensional vector space on the commutative field $\mathbb{K}$.

1.2 القيم والأشعة الذاتية *Eigenvalues and eigenvectors*

لنبدأ بتحديد القيم الذاتية والأشعة الذاتية لتطبيق خطي.

Let's start by defining the eigenvalues and eigenvectors of a linear application.

1.1.2 تعاريف Definitions

تذكير: $f : E \to E$ تشاكل داخلي (أندومورفيزم) إذا كان f تطبيق خطي من E في نفسه. بعبارة أخرى، من أجل كل $v \in E$ فإن $f(v) \in E$ و أيضا، من أجل كل $u, v \in E$ و كل $\alpha \in \mathbb{K}$:

Reminder: $f : E \to E$ is an endomorphism if f is a linear application of E in itself. In other words, for each $v \in E$ the $f(v) \in E$ and also, for each $u, v \in E$ and each $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$f(u + v) = f(u) + f(v) \qquad \text{and} \qquad f(\alpha v) = \alpha f(v)$$

1.1.2 : Definition - تعريف

لیكن $f : E \to E$ تشاكل داخلي.

Let $f : E \to E$ be an endomorphism.

(1) نسمي $\lambda \in \mathbb{K}$ قيمة ذاتية للتشاكل داخلي f إذا وجد شعاع غير معدوم $v \in E$ حيث :
We call $\lambda \in \mathbb{K}$ an eigenvalue of the endomorphism f if there is a non-zero vector $v \in E$ where:

$$\boxed{f(v) = \lambda v.}$$

(2) نسمي الشعاع v عندها الشعاع الذاتي للتطبيق الخطي f المرافق للقيمة الذاتية λ.
Then, we call the vector v the eigenvector of the linear application f according to the eigenvalue λ.

(3) طيف التطبيق f هو مجموعة القيم الذاتية للتطبيق الخطي f. ونرمز له بالرمز : $Sp(f)$ (أو $Sp_{\mathbb{K}}(f)$

إذا خصصنا الحقل المعرف عليه الفضاء الشعاعي).

The spectrum of the application f is the set of eigenvalues of the linear application f. We denote it by: $Sp(f)$ (or $Sp_{\mathbb{K}}(f)$ if we specify the field defined by the vector space).

1.1.2 : Remark - ملاحظة

إذا كان v شعاع ذاتي فإن من أجل كل $\alpha \in \mathbb{K}^*$ فإن αv هو ايضا شعاع ذاتي.

If v is an eigenvector then for every $\alpha \in \mathbb{K}^*$ then αv is also an eigenvector.

تتوافق هذه التعريفات مع التعاريف الخاصة بالمصفوفات.

These definitions correspond to the special definitions of matrices.

2.1.2 : Definition - تعريف

لتكن $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. وليكن $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ تطبيق خطي معرف كما يلي:

Let $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ and $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ be a linear application defined as follows:

$$f(v) = Av$$

فإن القيم الذاتية و الأشعة الذاتية للتطبيق الخطي f هي نفسها للمصفوفة المرافقة A.

the eigenvalues and eigenvectors of the linear application f are the same as the associated matrix A.

لنبحث عن كتابة أخرى للعلاقة الخطية المتداخلة التي تحدد الأشعة الذاتية:

Let's look for another writing for the collinear defining the eigenvectors:

$$\begin{aligned} f(v) = \lambda v &\iff f(v) - \lambda v = 0 \\ &\iff (f - \lambda id_E)(v) = 0 \\ &\iff v \in Ker(f - \lambda id_E) \end{aligned}$$

Hence it comes the term Eigenvector space. ومن هنا يأتي مصطلح الفضاء الشعاعي الذاتي.

2.1.2 الفضاء الشعاعي الذاتي Eigen-vectorial space

3.1.2 : Definition - تعريف

لتكن f تشاكل ذاتي من E. وليكن $\lambda \in \mathbb{K}$. نسمي فضاء شعاعي جزئي ذاتي مرافق للقيم الذاتية λ الفضاء الشعاعي الجزئي الذي نرمز له بالرمز E_λ المعرف بـ :

Let f be an endomorphism of E and $\lambda \in \mathbb{K}$. We call the sub-eigen-vectorial space associated with the eigenvalues λ the sub-vector space which we denote by E_λ defined by :

$$\boxed{E_\lambda = Ker(f - \lambda id_E).}$$

و يمكن أن نرمز له بالرمز $E_\lambda(f)$ في حالة إظهار ترابطه مع التطبيق الخطي f. أي:

we can denote it by $E_\lambda(f)$ in the case of showing its correlation with the linear application f.

$$\boxed{E_\lambda = \{v \in E \mid f(v) = \lambda v\}.}$$

Or in matrix form: أو بالصيغة المصفوفية :

$$\boxed{E_\lambda = \{v \in E \mid Av = \lambda v\}.}$$

2.1.2 : Remark - ملاحظة

Let E be the vector space of finite dimension. ليكن E فضاء شعاعي ذو بعد منته.

1) إذا كانت λ قيمة ذاتية لـ f فإن الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي E_λ ذو بعد $1 \geq$.
If λ is an eigenvalue of f then the eigen-sub vectorial space E_λ is of dimension ≥ 1.

2) الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي E_λ مستقر بالنسبة لـ f يعني: $f(E_\lambda) \subset E_\lambda$. بصورة أوضح:
The eigen-sub vectorial space E_λ is stable with respect to f means: $f(E_\lambda) \subset E_\lambda$.

$$v \in Ker(f - \lambda id_E) \implies f(f(v)) = f(\lambda v) = \lambda f(v) \implies f(v) \in Ker(f - \lambda id_E)$$

3.1.2 أمثلة Examples

1.1.2 : Example - مثال

Let $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ defined by ليكن $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ المعرف بـ

$$f(x, y, z) = \big(-2x - 2y + 2z, \quad -3x - y + 3z, \quad -x + y + z\big).$$

1) لنكتب التطبيق الخطي f على الشكل المصفوفي أي $f(X) = AX$:

Let's write the linear application f in matrix form $f(X) = AX$:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad and \qquad A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -3 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) نلاحظ أن إذا كان $v_1 = (1, 1, 0)$ فإن $f(1, 1, 0) = (-4, -4, 0)$ و يمكن كتابة أيضا $f(v_1) = -4v_1$. و بالتالي v_1 هو شعاع ذاتي مرافق للقيمة الذاتية $\lambda_1 = -4$.

Note that, if $v_1 = (1, 1, 0)$ then $f(1, 1, 0) = (-4, -4, 0)$ and can also be written $f(v_1) = -4v_1$. So v_1 is an eigenvector to the associated eigenvalue $\lambda_1 = -4$.

إذا فضلنا إجراء العمليات الحسابية باستخدام المصفوفات ، فإننا نعتبر v_1 كشعاع عمود ونحسب $Av_1 = -4v_1$.

If we prefer to conduct the mathematical calculations using matrices, we take v_1 as a vector column and calculate $Av_1 = -4v_1$.

3) $\lambda_2 = 2$ قيمة ذاتية.

$\lambda_2 = 2$ is an eigenvalue.

لإثبات ذلك ، علينا إيجاد شعاع غير معدوم في $Ker(f - \lambda_2 Id_{\mathbb{R}^3})$ من أجل $\lambda_2 = 2$. لهذا نحسب $A - \lambda_2 I_3$:

To prove this, we need to find a non-zero vector in $Ker(f - \lambda_2 Id_{\mathbb{R}^3})$ for $\lambda_2 = 2$. For this we calculate $A - \lambda_2 I_3$:

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

نجد $v_2 = (0, 1, 1)$ ينتمي الى النواة $A - 2I_3$ أي $(A - 2I_3)v_2$ هو الشعاع المعدوم. وبعبارة أخرى، $v_2 \in Ker(f - \lambda_2 Id_{\mathbb{R}^3})$، أي $f(v_2) - 2v_2 = 0$ ومنه $f(v_2) = 2v_2$. في الأخير: v_2 شعاع ذاتي مرافق للقيمة الذاتية $\lambda_2 = 2$.

We find that $v_2 = (0,1,1)$ belongs to the kernel $A - 2I_3$ ie $(A - 2I_3)v_2$ is the zero vector. In other words, $v_2 \in Ker(f - \lambda_2 Id_{\mathbb{R}^3})$. That is, $f(v_2) - 2v_2 = 0$, from which $f(v_2) = 2v_2$. Finally: v_2 is an eigenvector associated with the eigenvalue $\lambda_2 = 2$.

3) $\lambda_3 = 0$ قيمة ذاتية.

$\lambda_3 = 0$ is an eigenvalue.

بمكننا أن نفعل مثل ما ورد أعلاه ونجد أن $v_3 = (1,0,1)$ **تحقق** $f(v_3) = (0,0,0)$. **وبالتالي** $f(v_3) = 0 \cdot v_3$. **في الأخير :** v_3 **شعاع ذاتي مرافق للقيمة الذاتية** $\lambda_3 = 0$.

We can do like above and find that $v3 = (1,0,1)$ checks $f(v_3) = (0,0,0)$. So $f(v_3) = 0 \cdot v_3$. In the last: v_3 eigenvector concomitant to the eigenvalue $\lambda_3 = 0$.

4) وجدنا ثلاث قيم ذاتية، ولا نستطيع إيجاد اكثر من ذالك لأن المصفوفة A من الرتبة 3. نستنتج: $Sp(f) = \{-4, 0, 2\}$.

We found three eigenvalues, and we can't find more than that because the matrix A is of order 3. We conclude: $Sp(f) = \{-4, 0, 2\}$.

1.1.2 : Theorem - نظرية

ليكن f تشاكل ذاتي لـ E ذو بعد منته n. ولتكن $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ قيم ذاتية مختلفة لـ f حيث $k \leq n$. ومنه مجموع الفضاءات الشعاعية الجزئية الذاتية $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_k}$ المرافق للقيم الذاتية $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_k}$ يكون مجموعا مباشرا.

Let f be an endomorphism of E with finite dimension n. Let $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ be different eigenvalues of f where $k \leq n$. From which the sum of the sub-eigen-vectorial spaces $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_k}$ associated with the eigenvalues is a direct sum.

نجد النتيجة التالية في حالة المصفوفات:

In the case of matrices, we find the following result:

1.1.2 : Corollary - نتيجة

لتكن $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ قيم ذاتية مختلفة للتطبيق الخطي f و من أجل $1 \leq i \leq k$ ليكن v_i شعاع ذاتي مرافق للقيمة λ_i. فإن الأشعة v_i مستقلة خطيا.

Let $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ be different eigenvalues of linear application f and for $1 \leq i \leq k$ let v_i be an eigenvector of λ_i. The vectors v_i are linearly independent.

هذا يعني أن عدد القيم الذاتية يكون أقل من بعد الفضاء E.

This means that the number of eigenvalues is less than the space dimension of E.

2.1.2 : Example - مثال

من المثال السابق نأخذ $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ المعرف بـ

From the previous example we take $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ defined by

$$f(x,y,z)=\big(-2x-2y+2z,\quad -3x-y+3z,\quad -x+y+z\big).$$

لقد وجدنا القيم الذاتية والأشعة الذاتية المرافقة لها التالية:

We found the following eigenvalues and their associated eigenvectors:

$$\lambda_1=-4\quad v_1=(1,1,0),\qquad \lambda_2=0\quad v_2=(1,0,1),\qquad \lambda_3=2\quad v_3=(0,1,1).$$

من النتيجة الأشعة (v_1,v_2,v_3) تشكل جملة مستقلة لـ $\mathbb{R}^3$ لكن ثلاث أشعة مستقلة خطيا من $\mathbb{R}^3$ فهي حتما تشكل أساس. ومنه: (v_1,v_2,v_3) تشكل أساس يسمى الأساس الذاتي لـ $\mathbb{R}^3$.

From the result the vectors (v_1,v_2,v_3) form an independent family of $\mathbb{R}^3$ but three linearly independent vectors of $\mathbb{R}^3$ they forms a basis. Then: (v_1,v_2,v_3) forms the basis called the eigen-basic of $\mathbb{R}^3$.

نستطيع أن نكتب أيضا :

We can also write:

$$\mathbb{R}^3=E_{-4}\oplus E_0\oplus E_2.$$

2.2 كثير الحدود المميز *Characteristic polynomial*

يساعد كثيرة الحدود المميزة في العثور على القيم الذاتية.

Characteristic polynomials help in finding the eigenvalues.

1.2.2 كثير الحدود المميز Characteristic polynomial

4.2.2 : Definition - تعريف

لیكن $f : E \to E$ تشاكل ذاتي على الفضاء E ذو البعد المنته n. لتكن $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ مصفوفة التطبيق الخطي f في الأساس $\mathcal{B}$.

Let $f : E \to E$ be an endomorphism on the space E of finite dimension n. Let $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ be the matrix of the linear application f in the base $\mathcal{B}$.

نسمي كثير الحدود المميز لـ f هو نفسه كثير الحدود المميز للمصفوفة A ونكتب :

We call the characteristic polynomial of f the same as the characteristic polynomial of the matrix A and write:

$$\boxed{P_f(X) = P_A(X) = \det(A - XI_n).}$$

كثير الحدود المميز مستقل عن المصفوفة A (واختيار الأساس $\mathcal{B}$). وبالتالي إذا كانت B هي مصفوفة نفس التشاكل الداخلي f ولكن في أساس آخر $\mathcal{B}'$، فإنه يوجد $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ عكوسة حيث $B = P^{-1}AP$. ونكتب :

The characteristic polynomial is independent of the matrix A (and the choice of the base $\mathcal{B}$). So if B is another matrix of the endomorphism f but in another base $\mathcal{B}'$, then there is an inverse matrix $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ where $B = P^{-1}AP$. We write:

$$B - XI_n = P^{-1}(A - XI_n)P.$$

then **ومنه**

$$P_B(X) = \det(B - XI_n) = \frac{1}{\det(P)} \cdot \det(A - XI_n) \cdot \det(P) = \det(A - XI_n) = P_A(X).$$

i.e. **بمعنى آخر.**

$$P_B(X) = P_A(X).$$

2.2.2 تعيين القيم الذاتية Calculating eigenvalues

1.2.2 : Proposition - قضية

جذور كثير الحدود المميز تمثل القيم الذاتية له، ونكتب:

The roots of the characteristic polynomial represent its eigenvalues, and we write:

$$\boxed{f \text{ قيمة ذاتية لـ } \quad \textit{(eigen value of)} \quad \lambda \quad \Longleftrightarrow \quad P_f(\lambda) = 0}$$

بصيغة أخرى: لتكن $f : E \to E$. ولتكن $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ مصفوفته في الأساس $\mathcal{B}$. و $\lambda \in \mathbb{K}$.

In other words, let $f : E \to E$ and $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ the matrix in the base $\mathcal{B}$ and $\lambda \in \mathbb{K}$.

ومنه :

Then

$$\boxed{f \text{ قيمة ذاتية لـ } \quad \text{(eigen value of)} \quad \lambda \quad \Longleftrightarrow \quad \det(A - \lambda I_n) = 0}$$

3.2.2 : Example - مثال

إذا كانت D مصفوفة قطرية حيث

If D is a diagonal matrix where

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

فإن

then

$$P_D(X) = (\lambda_1 - X) \cdots (\lambda_n - X)$$

ومنه القيم λ_i هي جذور كثير الحدود $P_D(X)$ وهي أيضا القيم الذاتية للمصفوفة D.

The values λ_i are the roots of the characteristic polynomial $P_D(X)$ and are also the eigenvalues of the matrix D.

3.2 إختصار تشاكل ذاتي *Endomorphism reduction*

فيما يلي نعتبر E فضاء شعاعي ذو بعد منته، على الحقل التبديلي $\mathbb{K}$ و f تطبيق خطي (تشاكل ذاتي) مصفوفته المرافقة هي A.

Here we consider E as a finite-dimensional vector space, on the commutative field $\mathbb{K}$ and f is a linear application (endomorphism) whose associated matrix is A.

نقصد باختصار A على شكل قطري هو إيجاد أساس لـ E بحيث تكون مصفوفة f بالنسبة إليه مصفوفة قطرية. حينئذ توجد مصفوفة مربعة قابلة للقلب P تسمى مصفوفة العبور بحيث $D = P^{-1}AP$ أي أن A و D مشابهان.

We mean by short A in diagonal form, is to find a basis for the space E for which the matrix of f is a diagonal matrix. Then there is an invertible square matrix P called transit matrix such that $D = P^{-1}AP$ i.e. A and D are similar matrices.

2.3.2 : Theorem - نظرية

ليكن E فضاء شعاعي ذو بعد منته، على الحقل التبديلي $\mathbb{K}$، وليكن $f : E \longrightarrow E$ تطبيق خطي و $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ من $\mathbb{K}$، m قيمة ذاتية مختلفة لـ f.

Let E be a finite-dimensional vector space, on the commutative field $\mathbb{K}$, and let $f : E \longrightarrow E$ be a linear application and $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ are an m-different eigenvalue of f from $\mathbb{K}$.

نقول عن f إنه قابل للتقطير أو المصفوفة المرافقة له مشابهة لمصفوفة قطرية إذا كان E مجموع مباشر لفضاءاته الجزئية الذاتية أي:

We say that f is indivisible or its associated matrix is similar to a diagonal matrix if E is a direct sum of its sub-eigen-vectorial spaces, i.e.:

$$E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_m}$$

3.3.2 : Remark - ملاحظة

إذا كانت القيمة الذاتية λ ذات رتبة تضاعف r في كثير الحدود المميز فإن بعد الفضاء الذاتي E_λ المرافق للقيمة الذاتية λ على الأكثر m. وبالتالي:

If the eigenvalue λ is of the order of multiples of r in the distinct polynomial, then the dimension of the sub-eigen-vectorial spaces E_λ associated to the eigenvalue λ is at most m. Therefore:

$$1 \leq \dim (E_\lambda) \leq r.$$

و إذا كان f قابل للتقطير أو المصفوفة المرافقة له مشابهة لمصفوفة قطرية فإن حتما

If f is diagonalizable or its associated matrix is similar to a diagonal matrix, then inevitably we *have:*

$$\dim\left(E_\lambda\right) = r.$$

4.3.2 : Example - مثال

لتكن

Let

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

لنثبت أن A قابلة للتقطير في $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ ثم نبحث عن المصفوفة P حيث $P^{-1}AP$ حتى تكون مصفوفة قطرية.

Let's prove that A is diagonalizable to $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ and then find the matrix P where $P^{-1}AP$ is a diagonal matrix.

1) نبدأ بحساب كثير الحدود المميز لـ A :

We start by calculating the characteristic polynomial of A :

$$P_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 1 & -1 & 2-X \end{vmatrix} = (1-X)^2(2-X)$$

2) جذور كثير الحدود المميز هي الأعداد الحقيقية 1 بدرجة تضاعف $m(1) = 2$ و 2 درجة التضاعف $m(2) = 1$.

The roots of the characteristic polynomial are the real numbers 1 with a multiple of $m(1) = 2$ and 2 with a multiple of $m(2) = 1$.

3) لنحدد الفضاءات الشعاعية الجزئية الذاتية

Let's define the sub-eigen-vectorial spaces

1.1) ليكن E_1 الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي للقيمة الذاتية المضاعفة 1 :

Let E_1 be the sub-eigen-vectorial space of the doubled eigenvalue 1 :

$$E_1 = Ker(A - I_3) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid A \cdot X = X\}.$$

إذا وضعنا

If we put

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ومنه :

then:

$$X \in E_1 \iff AX = X \iff \begin{cases} x = x \\ y = y \\ x - y + z = 0 \end{cases} \iff x - y + z = 0$$

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x, & y, & y - x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\}$$

المستوي المولد على سبيل المثال من الأشعة $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ و $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ تشكل أساس.

The generated plane for example from the vectors $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ *and* $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *forms a basis.*

(2.1 ليكن E_2 الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي المرافق للقيمة الذاتية البسيطة 2 :

Let E_2 *be the sub-eigen-vectorial space associated with the simple eigenvalue* 2 *:*

$$E_2 = Ker(A - 2I_3) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid A \cdot X = 2X\}.$$

ومنه :

then

$$X \in E_2 \iff A \cdot X = 2X \iff \begin{cases} x = 2x \\ y = 2y \\ x - y + 2z = 2z \end{cases} \iff x = 0 \quad and \quad y = 0$$

$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}$ هو مستقيم شعاع توجيهه $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ و يشكل أساس له.

$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}$ *he is straight with vector beam* $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *and forms the basis for it.*

(3 أبعاد الفضاءات الشعاعية الجزئية الذاتية مساوية لدرجة تضاعف القيم الذاتية المرافقة لها:

The dimensions of the sub-eigen-vectorial spaces are equal to the degree of multiplication of their associated eigenvalues:

$$\dim E_1 = 2 = m(1), \quad \dim E_2 = 1 = m(2).$$

ومنه المصفوفة A قابلة للتقطير.

So the matrix A is distillable.

4) في الأساس (X_1, X_2, X_3)، التشاكل الذاتي الممثل بالمصفوفة A (في الأساس القانوني) له المصفوفة:

In the base (X_1, X_2, X_3), the endomorphism represented by the matrix A (in the canonical basis) has the matrix:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

بصفة أخرى، نضع P مصفوفة العبور التي أشعة أعمدتها X_1، X_2 و X_3 على الترتيب أي:

In other words, we put P the transit matrix whose column vectors are X_1, X_2 and X_3 in order, i.e.:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

ومنه $P^{-1}AP = D$.

then, $P^{-1}AP = D$.

4.2 سلسلة التمارين رقم *Exercise series N° 2*

Exercise N°– 1 – تمرين رقم

لتكن A مصفوفة من $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ المعرفة كمايلي :

Let A be a matrix of $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ defined as follows:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) هل المصفوفة A قابلة للتقطير ؟

Is the matrix A diagonalizable?