République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA
FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE
DÉPARTEMENT DE Biologie

Par
Dr : Chine Amel

Module : Biostatistiques

Niveau : L2

2023-2024

Chapitre 1

Lois de probabilités : loi Normale, Student et Fisher

1.1 Notions de base

Avant de parler sur les lois de probabilités il faut d'abord parler sur quelques définitions de base sur l'expérience aléatoires et ses résultats et comment calculer une probabilité.

1.1.1 Expérience aléatoire, ensemble fonadamental, évènement et probabilité

Définition 1 *Une expérience aléatoire c'est une experience qui a plusieurs résultats, mais on ne peut pas prédire exactement lesquels d'entre eux seront obtenus. Les résultats d'une telle expérience sont dus au hasard.*

Exemple 2 *Le lancement d'une pièce de monnaie. Nous savons bien que la pièce a deux faces : pile ou face, mais nous pouvons pas prévoire que nous aurons définitivement face*

Exemple 3 *Lancement les dés. Un dé à 6 faces de 1 à 6. On peut avoir 1 mais pas certainement. La même chose pour les autres faces.*

Définition 4 *L'ensemble fondamental, noté Ω,est l'ensemble qui contient tous les résultas possibles d'une expérience aléatoire.*

Définition 5 *l'évènement c'est un sous ensemble de l'ensemble fondamental Ω. On a trois types des évènements :*

1. *l'évènement élémentaire : contient un seul résultat d'une experience aléatoire.*

2. *Un évènement sur contient tous les résultats possibles d'une experience aléatoire c'est l'ensemble* Ω.
3. *Un événement impossible est un événement qui ne peut être réalisé ; c'est-à-dire ses résultats n'appartiennent pas à l'ensemble fondamental.*

Remarque 6 *1. l'évènement est noté par : A, B, C,.....*

2. *les éléments de* Ω *ou d'un évènement sont notés :* $\omega_1, \omega_2, ...$

Exemple 7 *Si on lance un dé, alors :*

1. *L'ensemble fondamental :*
$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$
2. *L'évènement* A *:* $\ll$*btenir un nombre pair*$\gg$ *est :*
$$A = \{2, 4, 6\}.$$
3. *L'évènement* B *:* $\ll$*obtenir un nombre impair*$\gg$ *est :*
$$B = \{1, 2, 3\}.$$
4. *L'évènement élémentaire* C *:* $\ll$*obtenir le nombre* $4 \gg$ *est :*
$$C = \{4\}.$$
5. *L'évènement impossible* D *:* $\ll$*obtenir le nombre* $7 \gg$ *est :*
$$D = \varnothing.$$

Définition 8 *La probabilité est une application de l'ensemble* Ω *à l'ensemble* $[0, 1]$ *qui associe à chaque évenement* A *une probabilité* $P(A)$

$$\begin{array}{ll} P: & \Omega \rightarrow [0,1] \\ & A \longmapsto P(A). \end{array}$$

où :

$$P(A) = \frac{\textit{Nombre des cas favorables}}{\textit{Nombre des cas possibles}} = \frac{Card\ (A)}{Car\ (\Omega)} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

et : Card (A) *: nombre des éléments de A, Cardinal de* Ω *: nombre des éléments de* Ω.

1. Pour tout évènement $A : 0 \leq P(A) \leq 1$.
2. Pour l'évènement sur : $P(\Omega) = 1$.

3. Pour l'évènement impossible : $P(\varnothing) = 0$,
4. Soient A, B deux évènements dans Ω, alors :
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$
5. Si $A \cap B = \varnothing$, alors :
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$
6. Soient A, B deux évènements dans Ω,Si $B \subset A$, alors :
$$P(A - B) = P(A) - P(B).$$
où $A - B$: l'ensemble A sauf l'ensemble B
7. Soit $\overline{A}$ est le complémentaire de A, alors :
$$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A).$$

Démonstration :
On sait que :
$$\Omega = A \cup \overline{A}.$$
Alors :
$$P(\Omega) = P\left(A \cup \overline{A}\right)$$
D'aprés la proposition 4 :

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= P\left(A \cup \overline{A}\right) \\ &= P(A) + P\left(\overline{A}\right) - P\left(A \cap \overline{A}\right) \end{aligned}$$

et car : $A \cap \overline{A} = \varnothing$, alors

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= P(A) + P\left(\overline{A}\right) - P(\varnothing) \\ &= P(A) + P\left(\overline{A}\right) - 0 \\ &= P(A) + P\left(\overline{A}\right). \end{aligned}$$

et car $P(\Omega) = 1$, alors
$$P(\Omega) = 1 = P(A) + P\left(\overline{A}\right)$$
Alors
$$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A).$$

Exemple 9 *Reprenons l'exemple 7, alors :*

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \; alors \; |\Omega| = 6$$
$$A = \{2, 4, 6\} \; alors \; |A| = 3,$$

alors

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{Nombre\ des\ cas\ favorables}{Nombre\ des\ cas\ possibles} \\ &= \frac{Card\ (A)}{Card\,(\Omega)} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} \in [0, 1]. \end{aligned}$$

De même, pour B :≪ *obtenir un nombre impair*≫

$$B = \{2, 4, 6\}, alors \; |B| = 3,$$

alors :

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{Nombre\ des\ cas\ favorables}{Nombre\ des\ cas\ possibles} \\ &= \frac{Card\ (B)}{Card\,(\ \Omega)} = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} \\ &= \frac{1}{2} \in [0, 1]. \end{aligned}$$

et pour l'évènement élémentaire C :≪*obtenir le nombre* 4 ≫ *est :*

$$C = \{4\} \; alors : |C| = 1.$$

donc :

$$\begin{aligned} P(C) &= \frac{Nombre\ des\ cas\ favorables}{Nombre\ des\ cas\ possibles} \\ &= \frac{Card\,(C)}{Card\,(\Omega)} = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Exemple 10 *On lance un dé deux fois. On note par* A *l'évènement suivante* A :≪*obtenir une somme égale à un nombre pair*≫*, et par* B *l'évènement suivante* B : ≪*obtenir une somme* <*6*≫ .

Premièrement on détermine l'ensemble fondamental Ω :

L'ensemble total c'est

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega_1 \times \Omega_2 \\ &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ &= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), \\ &(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), \\ &(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), \\ &(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), \\ &(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), \\ &(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}. \end{aligned}$$

Alors le cardinal de Ω *c'est*

$$|\Omega| = 6^2 = 36.$$

Pour l'évènement A : $\ll$*obtenir une somme égale à un nombre pair*$\gg$, *alors*

$A = \{(1,1)\,(1,3),(1,5),(2,2),(2,4)\,,(2,6),(3,1),(3,3)\,,(3,5),(4,2)\,,(4,4),(4,6),(5,1)\,,(5,3),(5,5$

La probabilité de réussite l'évènement A *c'est :*

$$P\left(A\right) = \frac{\textit{Nombre des cas favorables}}{\textit{Nombre des cas possibles}} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{18}{36} \in [0,1]$$

Soit B :$\ll$ *obtenir la somme* $<6$$\gg$, *alors :*

$$B = \{(1,1)\,,(1,2)\,,(1,3)\,,(1,4)\ \ ,(2,1)\,,$$
$$(2,2),(2,3)\,,(3,1)\,,(3,2)\,,(4,1)\}$$

La probabilité de réussite l'évènement B *c'est :*

$$P\left(B\right) = \frac{\textit{Nombre des cas favorables}}{\textit{Nombre des cas possibles}} = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{10}{36} \in [0,1]\,.$$

Proposition 11 *Soient* A, B *deux évènements dans* Ω :

1. *On dit que* A *et* B *sont disjoints si et seulement si*

$$A \cap B = \varnothing.$$

Définition 12 *et dans ce cas :*

$$P\left(A \cap B\right) = P(\varnothing) = 0.$$

On dit que A *et* B *sont indépendants si et seulement si*

$$P\left(A \cap B\right) = P\left(A\right) \times P\left(B\right).$$

Les événements A et B sont indépendants, ce qui signifie que la réalisation de A n'affecte pas la réalisation de l'événement B. Et vice versa. Par exemple, lorsque nous lançons un dé deux fois, obtenir 1 au premier lance ne signifie pas nécessairement que nous obtenons également 1 au deuxième lance.

1.2 Probabilités conditionnelles

Pour bien comprendre la probabilité conditionnelle on prend l'exemples suivants :

1. **Exemple 13** *Une urne contient 5 boules blanches et 4 boules rouge. On tire deux boules avec remise*
   - *Déterminer l'ensemble fondamentale*
   - *Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche au premier tirage*
   - *Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche au deuxième tirage*
   - *Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche au premier et au deuxième tirage*

   Réponse :
   - *L'ensemble fondamentale :*

   $$\Omega = \{BB, BR, RB, RR\}$$

   - *Soit :* B_i : ≪*La boule blanche tirée au* $i^{\text{ème}}$ *tirage soit blanche*≫ . *Donc :* $P(B_1) = \frac{\text{Nombre des boules blanches}}{\text{Nombre des boules rouges et blanches}} = \frac{|B_1|}{|\Omega|} = \frac{5}{9}$.
   - *Aussi* $P(B_2) = \frac{\text{Nombre des boules blanches}}{\text{Nombre des boules rouges et blanches}} = \frac{|B_2|}{|\Omega|} = \frac{5}{9}$.
   - *On remarque que le deuxième tirage ne dépend pas au premier tirage parce qu'on a fait un tirage avec remise alors la probabilité de tirer une boule blanche au premier et au deuxième tirage*

   $$P(B_1 \times B_2) = P(B_1) \times P(B_2) = \frac{25}{81}$$

Exemple 14 *On prend le même exemple 13 mais avec un tirage sans remise.*
- *On obtient le même ensemble fondamentale :*

$$\Omega = \{BB, BR, RB, RR\}$$

- *La probabilité de tirer une boule blanche au premier tirage est :*

$$P(B_1) = \frac{\text{Nombre des boules blanches}}{\text{Nombre des boules rouges et blanches}} = \frac{|B_1|}{|\Omega|} = \frac{5}{9}.$$

- *Pour calculer la probabilité de tirer une boule blanche au deuxième tirage : et car la boule tirée au premier tirage n'est pas remise dans l'urne alors le deuxième tirage est dépend du premier,*

c'est à dire on peut pas dire que : $P(B_2) = \frac{4}{8}$ *(la première boule est blanche) parce que si au premier tirage on obtient une boule rouge dans ce cas : :*$P(B_2) = \frac{5}{8}$. *On a deux possibilités soit la premiere boule est blanche soit rouge et on écrit :* $P(B_2 \mid B_1) = \frac{4}{8}$ *et* $P(B_2 \mid R_1) = \frac{5}{8}$ *(Cet écriure c'est la probabilité conditionnelle)*

Dans ce cas la l'évènement s'écrit :

$$B_2 = (B_1 \cap B_2) \cup (R_1 \cap B_2)$$

et pour calculer la probabilité :

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P((B_1 \cap B_2) \cup (R_1 \cap B_2)) \\ &= P(B_1 \cap B_2) + P(R_1 \cap B_2) \end{aligned}$$

Dans ce cas $P(B_1 \cap B_2) \neq P(B_1) \times P(B_2)$ *car le deuxième tirage dépend au premier. la même chose pour* $P(R_1 \cap B_2)$. *Pour*

Définition 15 *Soient* A, *et* B *deux évènements de* Ω, *avec* $P(B) \neq 0$, *la probabilité de l'évènement* A *se réalise sachant que l'évènement* B *est réalisé, et on écrit* $P(A \mid B)$ *est définit par :*

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Proposition 16 *Soient* A, *et* B *deux évènements de* Ω, *avec* $P(B) \neq 0$, *alors :*

1. $$0 \leq P(A \mid B) \leq 1$$

2. $$P(A \cap B) = P(A \mid B) \times P(B)$$

3. *Si* A, *et* B *sont indépendants alors :*

$$\begin{aligned} P(A \mid B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A) \times P(B)}{P(B)} \\ &= P(A) \end{aligned}$$

4. *Soit* $\bar{A}$ *est le complémentaire de* A *alors :*

$$\begin{aligned} P\left(\bar{A} \mid B\right) &= \frac{P\left(\bar{A} \cap B\right)}{P(B)} \\ &= \frac{P((\Omega - A) \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P((\Omega \cap B) - (A \cap B))}{P(B)} \\ &= \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} \quad \textit{car } (A \cap B) \subset B \\ &= \frac{P(B)}{P(B)} - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \end{aligned}$$

donc :

$$P\left(\bar{A} \mid B\right) = 1 - P\left(A \mid B\right)$$

5. *Soient A, B et C trois évènements de Ω, avec $P\left(C\right) \neq 0$ et A et B sont indépendants, alors :*

$$\begin{aligned} P\left(A \cup B \mid C\right) &= \frac{P\left(\left(A \cup B\right) \cap C\right)}{P\left(C\right)} \\ &= \frac{P\left(\left(A \cap C\right) \cup \left(B \cap C\right)\right)}{P\left(C\right)} \\ &= \frac{P\left(A \cap C\right) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)}{P\left(C\right)} \\ &= \frac{P\left(A \cap C\right) + P(B \cap C) - P(\emptyset)}{P\left(C\right)} \\ &= \frac{P\left(A \cap C\right) + P(B \cap C)}{P\left(C\right)} \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} P\left(A \cup B\right) &= \frac{P(A \cap C)}{P\left(C\right)} + \frac{P(B \cap C)}{P\left(C\right)} \\ &= P\left(A \mid C\right) + P\left(B \mid C\right) \end{aligned}$$

Exemple 17 *On revient à l'exemple 14, utilisant la proposition 2 :*

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P((B_1 \cap B_2) \cup (R_1 \cap B_2)) \\ &= P(B_1 \cap B_2) + P(R_1 \cap B_2) \\ &= P(B_1) \times P\left(B_2 \mid B_1\right) + P(R_1) \times P(B_2 \mid R_1) \\ &= \left(\frac{5}{9} \times \frac{4}{8}\right) + \left(\frac{4}{9} \times \frac{5}{8}\right) \\ &= \frac{20}{72} + \frac{20}{72} \\ &= \frac{40}{72} \end{aligned}$$

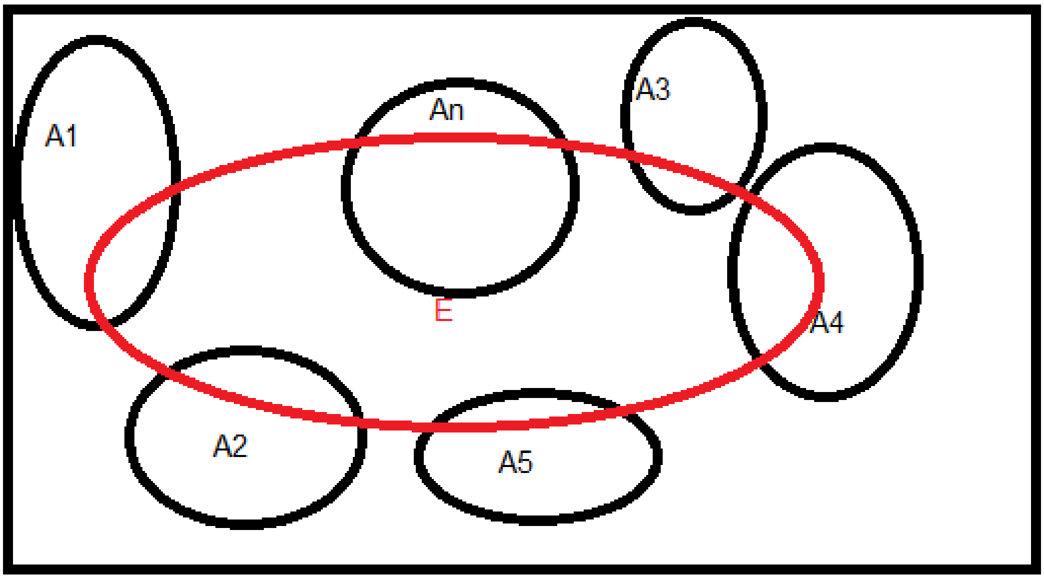
1.2.1 Théorème de Bayes

Définition 18 *Soient $A_1, ..., A_n$ des partitions de Ω (c'est à dire : $A_i \neq \emptyset$ pour tout i, $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tout $i \neq j$ et $\cup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$) et E un évènement où*

$$E = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) .... \cup (B \cap A_n)$$

alors la probabilité de A_i se réalise sachant que E est réalisé est le nombre :

$$P(A_i \mid E) = \frac{P(A_i)P(E \mid A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(E \mid A_i)} (\text{ deuxième formule de Bayes})$$



où :

$$P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(E \mid A_i)(\text{ c'est la première formule de Bayes})$$

Proposition 19 *Soient $A_1, ..., A_n$ des partitions de Ω (c'est à dire : $A_i \neq \emptyset$ pour tout i, $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tout $i \neq j$ et $\cup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$) et E un évènement et*

$$P(A_i \mid E) = \frac{P(A_i)P(E \mid A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(E \mid A_i)}(\text{ deuxième formule de Bayes})$$

Définition 20 *alors :*

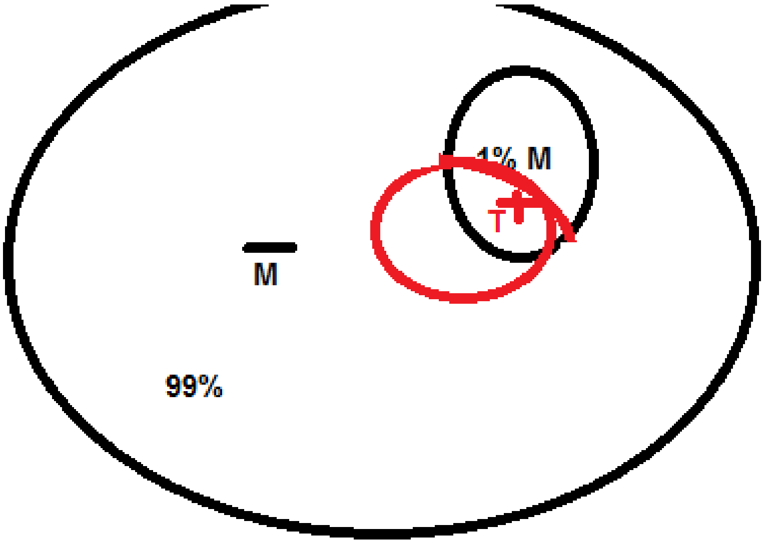
$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i \mid E) = P(A_1 \mid E) + P(A_2 \mid E) + ... + P(A_n \mid E) = 1$$

Exemple 21 *Dans ceratain population une maladie touche 1% des personnes On dispose de tests de dépistage de la maladie. Si la personne est malade, alors le test est positif avec une probabilité 0. 99. Si la personne est saine, alors le test est positif avec une probabilité de 0.05. On choisit une personne au hazard et on constate que le test est positif. On veut déterminer si cette personne est malade*

Premièrement on détermine les évènements :

Soit M l'évènement, "la personne a contracté la maladie"

Soit $\bar{M}$ l'évènement, "la personne n'a pas contracté la maladie"



Soit T^+ l'évènement "le test est positif". Alors on a les probabilités suivantes :

$$
\begin{aligned}
&P(M) = \frac{1}{100} = 0.01 \\
&P(\bar{M}) = 1 - P(M) = 1 - 0.01 = 0.99 \\
&P(T^+ \mid M) = 0.99 \ \textit{et}\ P(T^+ \mid \bar{M}) = 0.05
\end{aligned}
$$

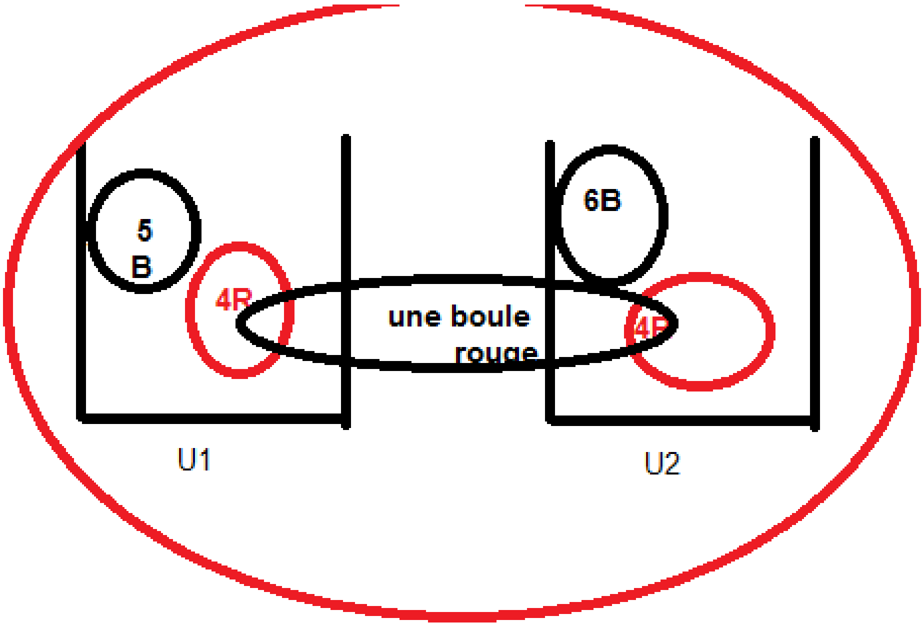
La probabilité que la personne est malade sachant que le test est positif est :

$$
\begin{aligned}
P(M \mid T^+) &= \frac{P(M)P(T^+ \mid M)}{(P(M)P(T^+ \mid M)) + \left(P(\bar{M})P(T^+ \mid \bar{M})\right)} \\
&= \frac{0.01 \times 0.99}{(0.01 \times 0.99) + (0.99 \times 0.05)} \\
&= 0.166\,67
\end{aligned}
$$

c'est à dire 16.67% le test soit positif pour les personnes malades et 83.3% le test soit positif pour les personnes malades. Alors on constate que ce test n'est pas fiable pour le diagnostique de cette maladie.

Exemple 22 *Nous avons deux urnes. Le premier urne contient 5 boules blanches et 4 boules rouges et le deuxième urne contient 6 boules blanches et 4 boules rouges.*

On tire une boule et on constate qu'elle est rouge. Quelle est la probabilités que la boule est tirée de l'urne 1.



Solution 23 *On a les évènements suivants :*

$$U_1 : \text{“Choisir l'urne 1”}, \quad U_2 : \text{“Choisir l'urne 2”}, \quad R : \text{"la boule tirée soit rouge"} \quad B : \text{" la boule tirée soit blanche."}$$

1. *La probabilité de choisir l'urne* U_1 *est :* $P(U_1) = \frac{1}{2} = P(U_2)$ *(la probabilité de choisir l'urne* U_2*)*
2. *la probabilité* $P(R|U_1)$ *:c'est la probabilité que la boule tirée est rouge sachant qu'il est tirée du l'urne* U_1*, alors :*
$$P(R|U_1) = \frac{5}{9}.$$
3. *la probabilité* $P(R|U_1)$ *:c'est la probabilité que la tirée est rouge sachant qu'il est tirée du l'urne* U_1*, alors :*
$$P(R|U_2) = \frac{4}{10}.$$
4. *La probabilité que la boule tirée provient de l'urne* U_1 *sachant que la boule*

est rouge est :(d'aprés la formule de Bayes 02)

$$
\begin{aligned}
P(U_1|R) &= \frac{P(U_1)P(R|U_1)}{P(U_1)P(R|U_1)+P(U_2)P(R|U_2)} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\times\frac{5}{9}}{\left(\frac{1}{2}\times\frac{5}{9}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{4}{10}\right)} \\
&= \frac{25}{43} = 0.581.
\end{aligned}
$$

C'est à dire $58,1\%$ *que la boule rouge tirée provient de l'urne 1 et pour* $P(U_2|R)$ *on applique la probabilité d'èvènement complémentaire :*

$$
\begin{aligned}
P(U_2|R) &= 1 - P(U_1|R) \\
&= 1 - \frac{25}{43} \\
&= \frac{18}{43} = 0.418.
\end{aligned}
$$

alors $41,8\%$ *que la boule rouge tirée et provient de l'urne* 2.

1.3 Variables aléatoires

Définition 24 *Une variable aléatoire réelle (v.a.r.)* X *sur* Ω *est une application de* Ω *dans* $\mathbb{R}$*.L'univers image par* X *est l'ensemble des images des éléments de* Ω *par* X*. On le note* $X(\Omega)$

$$
\begin{aligned}
X &: \Omega \to \mathbb{R} \\
&: \omega \to X(\omega)
\end{aligned}
$$

1.3.1 Variables aléatoires discrètes

Définition 25 *Une variable aléatoire réelle (v.a.r.)* X *sur* Ω *est dite discrète si l'ensemble* $X(\Omega)$ *est dénombrable ou fini.*

Exemple 26 *On lance une pièce de monnaie. soit* X *v.a prend la valeur* 1 *si on obtient Face et* 0 *si on obtient Pile. alors :*

1. *L'ensemble fondamentale* $\Omega = \{Pile, Face\}$
2. *L'ensemble* $X(\Omega) = \{0, 1\}$

Exemple 27 *On lance un dé deux fois. Soit .*X *v.a présente le produit des deux nombres qui apparaissent*

Premièrement on détermine l'ensemble fondamental Ω :

L'ensemble total c'est

$$\begin{aligned}\Omega &= \Omega_1 \times \Omega_2 \\ &= \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\} \\ &= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6), \\ &(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6), \\ &(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6), \\ &(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6), \\ &(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6), \\ &(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}.\end{aligned}$$

L'ensemble $X(\Omega)$ est :

$$X(\Omega) = \{1,2,3,4,5,6,8,9,10,12,15,16,18,20,24,25,30,36\}$$

1.3.2 Lois de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Définition 28 *A chacune des réalisations x_i de la variable aléatoire X est associé une probabilité*

$$P_X(x_i) = P(X = x_i) = P(X^{-1}(x_i))$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$$

Exemple 29 *On prend le même exemple (27) et on calcule la probabilité de chaque valeur $x_i \in X(\Omega)$ comme suit :*

$$\begin{aligned}P_X(1) &= P(X=1) = P(X^{-1}(1)) = P(\{(1,1)\} = \frac{1}{36} \\ P_X(2) &= P(X=1) = P(X^{-1}(2)) = P(\{(1,2),(2,1)\} = \frac{2}{36} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ P_X(6) &= P(X=6) = P(X^{-1}(6)) = P(\{(1,6),(6,1),(2,3),(3,2)\} = \frac{4}{36} \\ &\vdots\end{aligned}$$

De la même manière, on calcule la probabilité jusqu'à la dernière valeur pour $X = 36$. On résume la loi de probabilité X dans un tableau comme suit :

x_i	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12
$P(X = x_i)$	1/36	2/36	2/36	3/36	2/36	4/36	2/36	1/36	2/36	4/36
x_i	15	16	18	20	24	25	30	36		
$P(X = x_i)$	2/36	1/36	2/36	2/36	2/36	1/36	2/36	1/36		

1.3.3 Variables aléatoires continues

Définition 30 *Une variable aléatoire réelle (v.a.r.) X sur Ω est dite continue si l'ensemble $X(\Omega)$ est nondénombrable ou c'est un interval de $\mathbb{R}$.*

Exemple 31 *-Soit X v.a définie dans $\mathbb{R}$.*
-Soit Y v.a définie dans $\mathbb{R}^+$
-Soit Z v.a définie dans $[0, 1]$

La variables aléatoires continues est définie par deux fonctions : fonction de densité et fonction de répartition

Définition 32 *Soit X v.a continue, On dit que $f(x)$ est une densité de la variable X si elle vérifie les deux conditions suivantes :*

1. *pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$*
2. *$\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1.$*

Exemple 33 *Soit f une fonction définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} 2\exp(-2x) & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ non \end{cases}$$

Est ce que f est une fonction de densité

pour répondre à cette question il faut voir si les deux conditions de la définition 32 sont vérifiées, alors

1. *on a : $2\exp(-2x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$*
2. *on calcule $\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)dx$ comme suit*

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{\infty} 2\exp(-2x)dx \\ &= 2\int_{0}^{\infty} \exp(-2x)dx \\ &= 2\left[\frac{1}{2}\exp(-2x)\right]_0^{\infty} \\ &= 2\left[0 + \frac{1}{2}\right]_0^{\infty} \\ &= 1 \end{aligned}$$

donc : les conditions 1 et 2 sont vérifiées alors $f(x)$ est une fonction de densité.

Définition 34 *Soit X une v.a continue. La fonction de répartition F est définie par :*

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Exemple 35 *on prend le meme exemple 33 et on calcule $F(x)$*
- *Pour $x < 0$: $F(x) = 0$.*
- *Pour $x \geq 0$:*

$$\begin{aligned} F(x) = P(X \leq x) &= \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt \\ &= 2\int_{0}^{x} \exp(-2t)dt \\ &= 2\left[-\frac{1}{2}\exp(-2t)\right]_{0}^{x} \\ &= -\exp(-2x) + 1 \\ &= 1 - \exp(-2x) \end{aligned}$$

alors

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 1 - \exp(-2x) & si\ x \geq 0 \end{cases}.$$

Pour calculer : $F(-2), F(0.5)$ et $F(3)$ Nous substituons dans la fonction $F(x)$ et nous obtenons :

$$\begin{aligned} F(-2) &= 0\ \ car\ -2 < 0 \\ F(0.5) &= 1 - \exp(-2(0.5)) = 0.632\,12\ \ car\ \ 0.5 > 0 \\ F(3) &= 1 - \exp(-2(3)) = 0.997\,52\ \ car\ 3 > 0 \end{aligned}$$

1.3.4 Propriétés de la fonction de répartition

Soit X une v.a continue.et F sa fonction de répartition, alors :

1. $0 \leq F(x) \leq 1$
2. $P(X = x) = 0$
3. $P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)$
4. Si $a < b$ alors $F(a) < F(b)$, c'est à dire F est une fonction croissante
5. Pour $a, b \in \mathbb{R}, P(a < X < b) = F(b) - F(a)$.

1.3.5 Loi Normale (Gausse)

La loi normale joue un rôle très important en statistique et en probabilité car elle a des propriétés pour calculer la probabilité et présente une condition nécessaire pour appliquer les tests (chapitre 3 et les cours de 3ème année).

La loi normale ou loi de Gauss : C'est une loi des variables aléatoire continue. Elle est définie par deux paramètres : l'espérance noté μ et la variance noté σ^2. Parmi les propriétés de la loi normale la symétrie par rapport à la moyenne.

Définition 36 *Soit X v.a continue.suit la loi normale $N(\mu, \sigma^2)$. La fonction de densité de X est définie par :*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}), x \in \mathbb{R}$$

La figure 1.1 indique la courbe de la loi normale pour différentes valeurs de μ et σ^2.

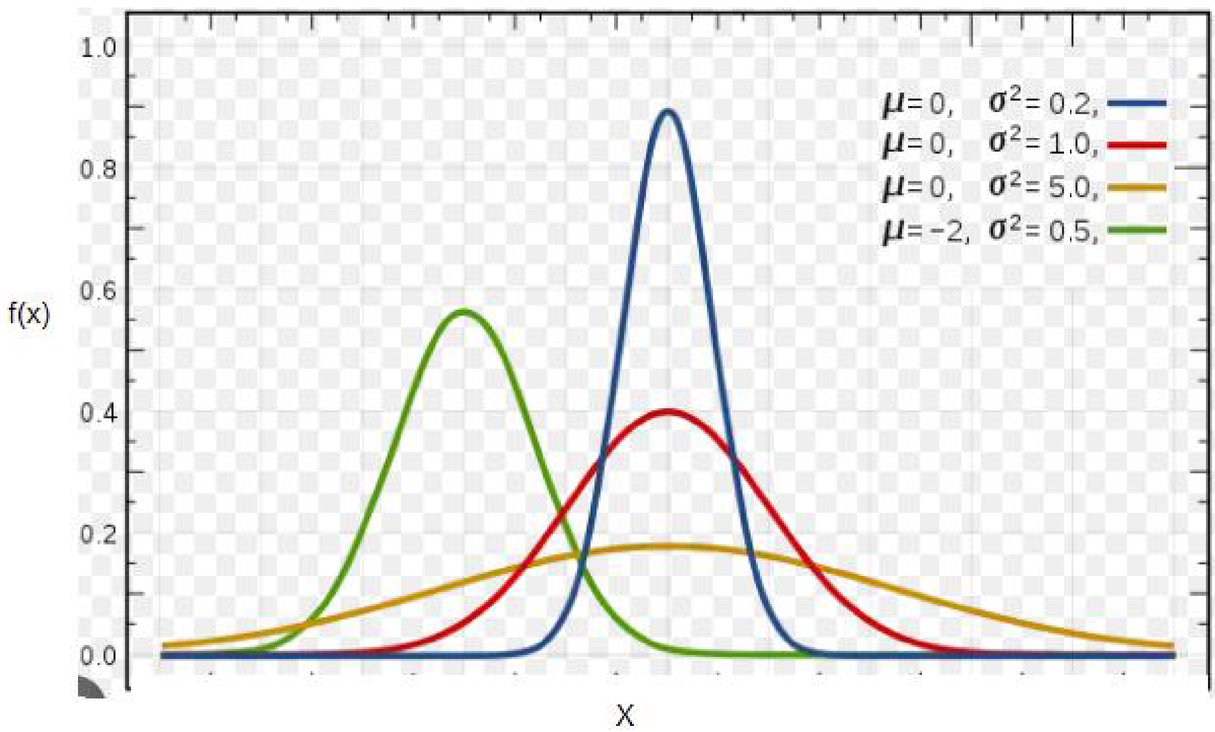


FIG. 1.1 – Courbe de densité de la la loi normale pour différentes valeurs de μ et σ^2.

1.3.6 Loi normale standard ou loi normale centrée réduite

Définition 37 *Soit X v.a continue.suit la loi normale $N(\mu, \sigma^2)$. Si $\mu .= 0$ et $\sigma^2 = 1$ alors on dit que la variable Z suit la loi normale standard ou centrée réduite et sa fonction de densité définie par :*

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2} z^2)$$

Définition 38 *La fonction de répartition de la variabe Z qui suit la loi normale standard $N(0, 1)$ est définie par :*

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2} z^2) dz, z \in \mathbb{R}.$$

Remarque 39 *On peut pas calculer la fonction de répartition manuellement car elle trés compliqué.C'est pour ça on a la table de la loi normale qui nous permet de calculer la probabilité de x ou z.*

1.3.7 Propriétés de la loi normale

1. La loi normale est symétrique, c'est à dire

$$\begin{aligned} \Phi(-z) &= P(Z \leq -z) \\ &= P(Z \geq z) \\ &= 1 - P(Z \leq z) \\ &= 1 - \Phi(z) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} P(Z \geq z) &= 1 - P(Z \leq z) \\ &= 1 - \Phi(z) \end{aligned}$$

3. Pour $a, b \in \mathbb{R}$:

$$P(a \leq Z \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

et

$$\begin{aligned} P(-a \leq Z \leq a) &= \Phi(a) - \Phi(-a) \\ &= \Phi(a) - (1 - \Phi(a)) \\ &= 2\Phi(a) - 1. \end{aligned}$$

4. Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ alors $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$, donc

$$P(X \leq x) = P(Z \leq z)$$

Remarque 40 *-Pour calculer la $P(X \leq x)$ si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ on utilise la propriété 5 et on lit la valeur dans la table de la loi $N(0,1)$.*

-Le signe $(\sim)$ signifie suit la loi .

Exemple 41 *Soit Z une v.a suit la loi $N(0,1)$. Calculer*

$$P(Z \leq 1.20), P(Z \leq -1.20),\ P\left(-2.36 \leq Z \leq 2.36\right)\ \text{et}\ P\left(-1.52 \leq Z \leq 2.36\right)$$

Exemple 42 *Soit X une v.a suit la loi $N(1, 0.5)$. Calculer*

$$P(X \leq 1), P(Z \leq 0.55)\ \text{et}\ P\left(-2 \leq Z \leq 2\right)$$

Pour calculer ces probabilité on utilise la table de la loi normale comme suit :

1. $P(Z \leq 1.20) = 0.8849$

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

2. $P(Z \leq -1.20)$, *on utilise la propriété 1 :*

$$\begin{aligned} P(Z \leq -1.20) &= 1 - P(Z \leq 1.20) \\ &= 1 - 0.8849 \\ &= 0.115\,1 \end{aligned}$$

3. $P\left(-2.36 \leq Z \leq 2.36\right)$: *On utilise la propriété 3 et on lit la valeur 2.36 de la table*

$$\begin{aligned} P\left(-2.36 \leq Z \leq 2.36\right) &= 2\Phi(2.36) - 1 \\ &= 2(0.9909) - 1 \\ &= 0.9818 \end{aligned}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

4. $P(-1.52 \leq Z \leq 2.36)$ *On utilise la propriété 3 et 1 et on lit la valeur* 1.52 *et* 2.36 *de la table*

$$\begin{aligned} P(-1.52 \leq Z \leq 2.36) &= \Phi(2.36) - \Phi(-1.52) \\ &= \Phi(2.36) + \Phi(1.52) - 1 \\ &= 0.9909 + 0.9357 - 1 \\ &= 0.926\,6 \end{aligned}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0
1,4	0,9192	0,9207	[illegible]	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0
1,5	[illegible]	[illegible]	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0

La figure(1.2) illustre Les probabilités pour les différentes valeurs de Z de l'exemple (41)

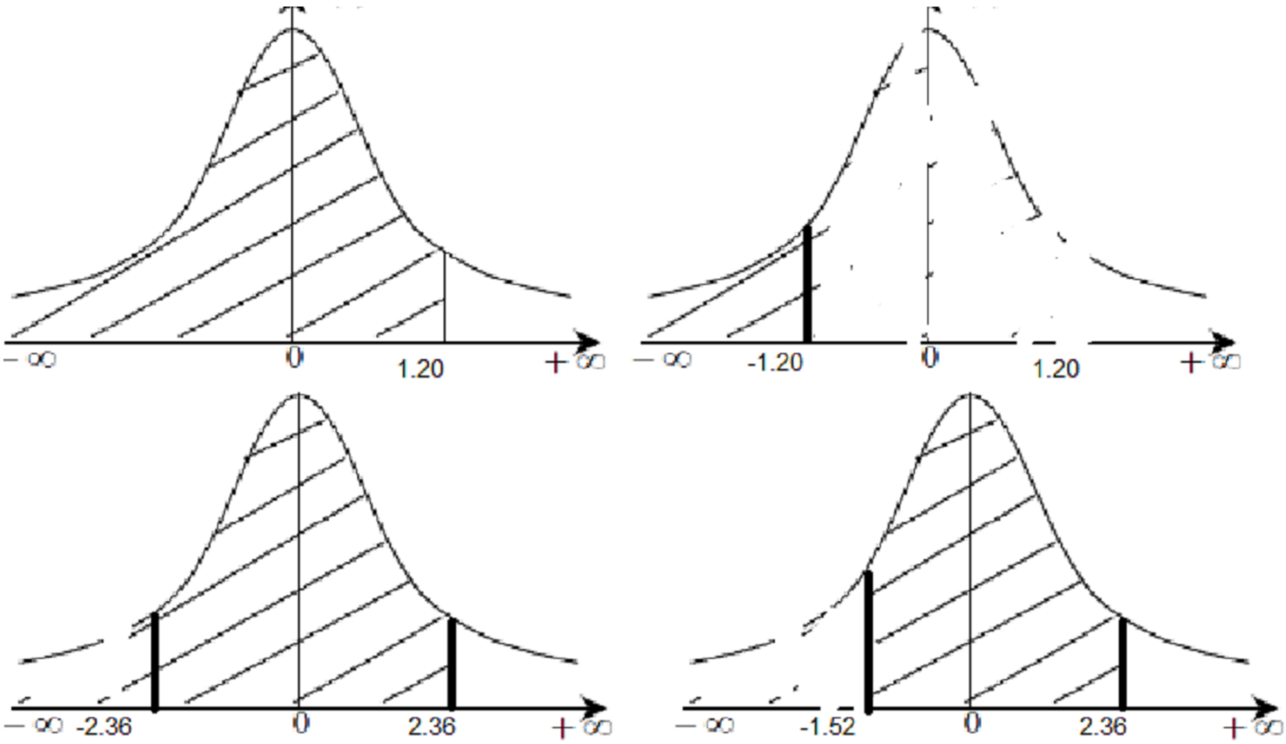


FIG. 1.2 – La probabilité $P(Z \leq z)$ dans les cas 1,2,3 et 4.

5. *Pour calculer les probabilités*

$$P(X \leq 1), P(X \leq 0.55) \ \textit{et} \ P(-2 \leq X \leq 2)$$

on utilise la propriété 5 et on lit les valeurs de la table de la loi loi normale comme suit :
On a $\mu = 1$ *et* $\sigma^2 = 0.5$, *alors :*

(a)

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= P\left(\frac{X-1}{\sqrt{0.5}} \leq \frac{1-1}{\sqrt{0.5}}\right) \\ &= P\left(Z \leq \frac{1-1}{\sqrt{0.5}}\right) \\ &= P(Z \leq 0) \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823

(b)

$$\begin{aligned} P(X \leq 0.55) &= P\left(\frac{X-1}{\sqrt{0.5}} \leq \frac{0.55-1}{\sqrt{0.5}}\right) \\ &= P(Z \leq -0.636\,40) \\ &= 1 - P(Z \leq 0.636\,40) \\ &= 1 - \Phi(0.636\,40) \\ &= 1 - 0.7357 \\ &= 0.264\,3 \end{aligned}$$

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365

(c)

$$
\begin{aligned}
P\left(-2 \leq X \leq 2\right) &= P\left(\frac{-2-1}{\sqrt{0.5}} \leq \frac{X-1}{\sqrt{0.5}} \leq \frac{2-1}{\sqrt{0.5}}\right) \\
&= P\left(\frac{-2-1}{\sqrt{0.5}} \leq Z \leq \frac{2-1}{\sqrt{0.5}}\right) \\
&= P\left(-4.2426 \leq Z \leq 1.4142\right) \\
&= \Phi\left(1.142\right) + \Phi(4.2426) - 1 \\
&= 0.8729 + 0.99996 - 1 \\
&= 0.87286
\end{aligned}
$$

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,53
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,57
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,61
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,64
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,68
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,71
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,75
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,78
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,81
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,83
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,85
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,88
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,89
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,91
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,93

Table pour les grandes valeurs dez :

Z	3	3,2	3,4	3,6	3,8	4	4,2	4,4
F(z)	0,99865003	0,99931280	0,99966302	0,99984085	0,99992763	0,9999683	0,99998665	0,99999458

1.3.8 Loi dérivée de la loi normale

Loi de Khi-deux : Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon la loi normale centrée réduite. La variable

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

suit la loi du **Khi-deux** à n degrés de liberté. On note $Y_n \sim \chi_n^2$.

Exemple 43 *Soit* $X_i \sim N(0,1), i = 1, ...4.$ *alors :*

$$Y_2 = \sum_{i=1}^{2} X_i^2 \sim \chi_2^2$$

$$Y_3 = \sum_{i=1}^{3} X_i^2 \sim \chi_3^2$$

$$Y_6 = Y_2 + \sum_{i=1}^{4} X_i^2 \sim \chi_6^2$$

Remarque 44 *degré de liberté signifie le nombre des variables aléatoires*

Loi de Student : Soit X variables aléatoires suit la loi normale centrée réduite$N(0,1)$ et Y v.a suit la loi du Khi-deux à n degrés de liberté. Si X et Y sont indépendantes alors :

$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$$

suit la loi du **Student** à n degrés de liberté. On note $T \sim T_n$.

Exemple 45 *Soit* $X \sim N(0,1)$, *et* $Y_3 \sim \chi_3^2$ *alors :*

$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y_3}{n}}} \sim T_3.$$

Loi de Fisher-Snédécor : Soit n_1 et n_2 désignent des entiers naturels non nuls. Soit Y_1 et Y_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois du **Khi-deux** à n_1 et n_2 degrés de liberté

respectivement, alors

$$F = \frac{\frac{Y_1}{n_1}}{\frac{Y_2}{n_2}}$$

suit la loi de Fisher-Snédécor à n_1 et n_2 degrés de liberté. On note $F \sim F_{n_1,n_2}$.

Exemple 46 *Soit* $Y_4 \sim \chi_4^2$ *alors :, et* $Y_3 \sim \chi_3^2$ *alors :*

$$F = \frac{\frac{Y_4}{4}}{\frac{Y_3}{3}} \sim F_{4,3}.$$