الفصل الرابع

النشر المحدود و حساب التكاملات

Limited Expansion and Integrals calculus

فهرس الفصل

1.4 النشر المحدود *Limited Expansion*

نأخذ مثال الدالة الأسية. يمكن إعطاء فكرة عن سلوك الدالة $f(x) = \exp x$ حول النقطة $x = 0$ بواسطة ظلها ، الذي تكون معادلته $y = 1 + x$. لقد قمنا بتقريب الرسم البياني بخط مستقيم.

We take the example of the exponential function. You can give an idea of the behavior of the function $f(x) = e^x$ around the point $x = 0$ using its shadow, which has the equation $y = 1 + x$. We have approximated the graph with a straight line.

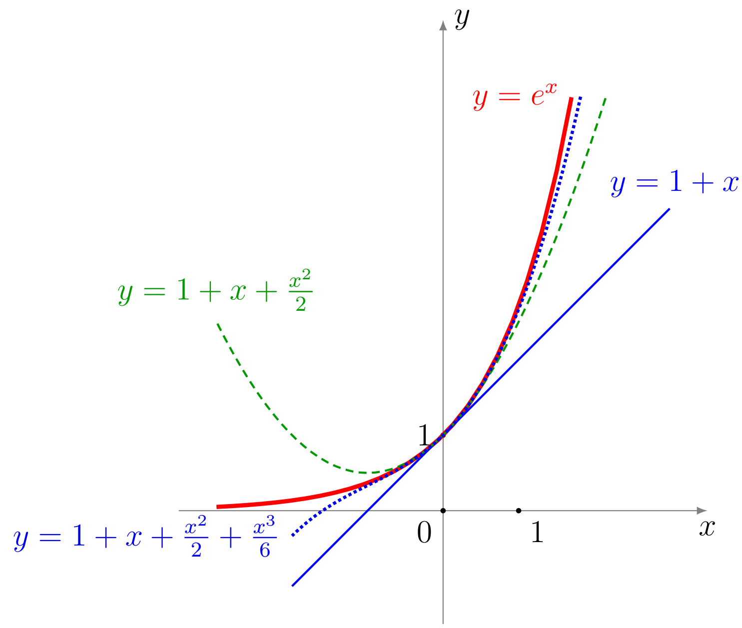
إذا أردنا أن نجد تقريب أفضل ، نأخذ مثلا المعادلة $y = c_0 + c_1x + c_2x^2$، الرسم البياني للدالة f في جوار النقطة $x = 0$ هو مثل المعادلة $y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$. هذه المعادلة لها خاصية مميزة هي $g(x) = \exp x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right)$ ثم $g(0) = 0$ ، $g'(0) = 0$ و $g''(0) = 0$. نعثر على معادلة القطع المكافئ يعني نجد تقريب من الدرجة 2 للدالة f.

If we want to find a better approximation, we can take, for example, the equation $y = c_0+c_1x+c_2x^2$. The graph of the function f near the point $x = 0$ is like the equation $y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$.

This equation has a special property: $g(x) = \exp x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right)$, and then $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$, and $g''(0) = 0$. We can find the equation of the equivalent parabola, meaning we find a second-degree approximation for the function f.

بالطبع إذا أردنا أن نكون أكثر دقة، فسنستمر بالتقريب باستعمال الدرجة الثالثة والرابعة …

Of course, if we wanted to be more precise, we would continue to approximate using the third and fourth degrees...



في هذا الجزء من الفصل، سوف نبحث على كثير الحدود من الدرجة n بالنسبة لأي دالة، التي تقترب من الدالة بشكل أفضل. النتائج صالحة فقط في جوار النقطة الثابتة x (غالبا ما تكون بجوار 0). سيتم حساب كثير الحدود هذا من المشتقات المتتالية عند النقطة التي تم النظر فيها.

In this part of the chapter, we will look for the nth-degree polynomial approximation for any function that provides a better fit. The results are valid only in the vicinity of a fixed point xx (often near 0). This polynomial approximation will be computed from the successive derivatives at the point under consideration.

1.1.4 صيغة تايلور Taylor formula

تسمح صيغة تايلور، التي سميت على اسم عالم الرياضيات بروك تايلور الذي أنشأها عام 1712، بتقريب دالة قابلة للتفاضل عدة مرات بجوار نقطة بواسطة كثير حدود، الذي تعتمد معاملاته فقط على مشتقات الدالة في هذه النقطة.

The Taylor formula, named after the mathematician Brook Taylor who developed it in 1712, allows for approximating a differentiable function multiple times around a point using power series, whose coefficients depend solely on the derivatives of the function at that point.

1.1.4 : Theorem - نظرية

لتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة من الفئة $\mathcal{C}^{n+1}(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N})$ ولتكن $x_0, x \in I$ و منه لدينا

Let $f : I \to \mathbb{R}$ be a function of the class $\mathcal{C}^{n+1}(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N})$ and let $x_0, x \in I$, then we have

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \dots \\ &\quad + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + (x-x_0)^n \varepsilon(x-x_0), \end{aligned}$$

where حيث

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0.$$

1.1.4 : Example - مثال

لتكن الدالة f المعرفة كما يلي:

Let the function f be defined as follows:

$$\begin{aligned} f :]-1, +\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(1+x) \end{aligned}$$

قابل للإشتقاق مالانهاية من المرات، سنقوم بحساب صيغ تايلور في النقطة 0 من المراتب الثلاثة الأولى.

Differentiable infinitely many times, we will compute the Taylor series at the point 0 up to the first three orders.

لدينا: $f(0) = 0$. ثم نحسب $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ نجد $f'(0) = 1$.

We have $f(0) = 0$. Then, when we calculate $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, we find that $f'(0) = 1$.

بعدها نحسب $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ نجد $f''(0) = -1$.

Afterwards, we calculate $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ and find that $f''(0) = -1$.

وأخيرا نحسب $f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ ونجد $f^{(3)}(0) = 2$.

Finally, we calculate $f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ and find that $f^{(3)}(0) = 2$.

نستطيع أن نثبت بالتراجع أن:

We can demonstrate by induction that:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

حيث يمكن حساب القيمة :

Where the value can be calculated:

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!.$$

وبالتالي من أجل $n > 0$ لدينا :

Thus for $n > 0$ we have:

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}x^n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n.$$

بصفة عامة، كثير الحدود لتايلور للدالة f في النقطة 0 هو

In general, the Taylor polynomial of the function f at the point 0 is

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}.$$

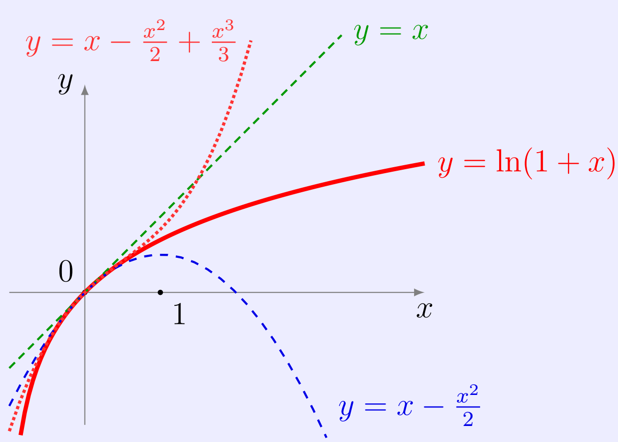
فيما يلي أول ثلاث كثيرات حدود لتايلور:

Here are the first three Taylor series expansions:

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= x - \frac{x^2}{2}, \\ P_3(x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}. \end{aligned}$$

في الرسم البياني أسفله، تقترب الرسوم البيانية لكثيرات الحدود P_1 و P_2 و P_3 أكثر فأكثر من الرسم البياني لـ f وهذا فقط في جوار 0.

In the graph below, the plots of the Taylor series P_1, P_2, and P_3 approach the graph of f more and more closely, but only in the vicinity of 0.



4.1.2 صيغة ماك ـ لوران Mac-Laurent formula

4.1.2 : Theorem - نظرية

لتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة من الفئة $\mathcal{C}^{n+1}(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N})$ ولتكن $x \in I$ و منه لدينا بتطبيق صيغة تايلور في النقطة $x_0 = 0$ نجد صيغة ماك ـ لوران:

Let $f : I \to \mathbb{R}$ be a function of the class $\mathcal{C}^{n+1}(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N})$ and let $x \in I$ Then have, by applying Taylor's formula at the point $x_0 = 0$, we find the Mack-Laurent formula:

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^n}{n!}\varepsilon(x).}$$

4.1.2 : Example - مثال

$$1)\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

$$2)\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$$

$$3)(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$3.1)\quad \alpha = -1 \Longrightarrow \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(n)$$

$$3.2)\quad \alpha = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \ldots + (-1)^n\frac{1*3*5\ldots(2n-1)}{2*4*6\ldots 2n}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$4)e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$$

$$5)\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$$

4.1.3 النشر المحدود لبعض الدوال المألوفة Limited expansion of some common functions

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\ \bigstar$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + o(x^n)\ \bigstar$$

$$\star \quad ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n+1})$$

$$\star \quad sh(x) = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

4.1.4 عمليات على النشر المحدود Operations on limited expansions

رأينا سابقا من صيغة طايلور وصيغة ماك - لوران أنه يمكن أن نغير النشر المحدود لدالة ما في النقطة $a \in \mathbb{R}$ إلى نشر محدود في النقطة 0 ولهذا سوف نشرح العمليات على النشر المحدود فقط في النقطة 0.

We saw previously from Taylor's and the Mac-Loran formula that we can change the limited expansion of a function at the point $a \in \mathbb{R}$ to a limited expansion at the point 0. Therefore, we will explain the operations on the limited expansion only at the point 0.

لتكن $n \in \mathbb{N}$ ولتكن f و g دالتين معرفتين عند 0 تقبلان في جوار 0 النشر المحدود من الدرجة n حيث:

Let $n \in \mathbb{N}$ and let f and g be functions defined at 0 that accept in the neighborhood of 0 the limited expansion of degree n where:

$$\begin{aligned} f(x) &= p_0 + p_1 x + \cdots + p_n x^n + x^n \epsilon_1(x) \\ &= P_n(x) + x^n \epsilon_1(x) \end{aligned}$$

و and

$$\begin{aligned} g(x) &= q_0 + q_1 x + \cdots + q_n x^n + x^n \epsilon_2(x) \\ &= Q_n(x) + x^n \epsilon_2(x) \end{aligned}$$

قضيــة - Proposition : 1.1.4

- $f+g$ يقبل نشر محدود من الدرجة n عند 0 ويمثل مجموع نشري الحدود للدالتين f و g:

$f + g$ accepts a limited expansion of degree n at 0 and represents the sum of the two limited expansions of the functions f and g:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = P_n(x) + Q_n(x) + x^n \epsilon(x).$$

- fg يقبل نشر محدود من الدرجة n عند 0 ويمثل جداء نشري الحدود للدالتين f و g مع الإبقاء إلا على الحدود ذات الدرجة أقل من أو تساوي n:

fg accepts a limited expansion of degree n at 0 and represents the product of the limited expansion of the functions f and g, leaving only the terms with degree less than or equal to n:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = T_n(x) + x^n \epsilon(x)$$

حيث $T_n(x)$ كثير الحدود $(P_n(x) \cdot Q_n(x))$ المتوقف عند الدرجة n.

Where $T_n(x)$ is the polynomial $(P_n(x) \cdot Q_n(x))$ stopping at degree n.

- إذا كانت $g(0) = 0$ (أي $q_0 = 0$) فإن الدالة $f \circ g$ تقبل نشر محدود عند 0 من الدرجة n حيث جزء كثير الحدود المتوقف عند الدرجة n معرف بالتركيب $P(Q(x))$.

If $g(0) = 0$ (i.e. $q_0 = 0$) then the function $f \circ g$ accepts a limited expansion at 0 of degree n where the part of the polynomial stopping at degree n is defined by the structure $P(Q(x))$.

- إذا كان $q_0 \neq 0$ فإن لدينا:

If $q_0 \neq 0$ then we have:

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{q_0} \frac{1}{1 + \frac{q_1}{q_0}x + \cdots + \frac{q_n}{q_0}x^n + \frac{x^n \epsilon_2(x)}{q_0}}.$$

- إذا كانت F دالة أصلية للدالة f فإن F تقبل نشر محدود عند a من الدرجة $n+1$ ويكتب :

If F is a primitive function of the function f, then F accepts a limited expansion at a of degree $n+1$ and is written:

$$F(x) = P_{n+1}(x-a) + (x-a)^{n+1}\eta(x)$$

حيث: $\lim_{x \to a} \eta(x) = 0$.

where: $\lim_{x \to a} \eta(x) = 0$.

مثال - Example : 3.1.4

حساب النشر المحدود للدالة $\arctan(x)$.

Calculate the limited expansion of the function $\arctan(x)$.

We know that: نعلم أن:

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

We set: نضع

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

and $F(x) = \arctan(x)$ *and we write:* و $F(x) = \arctan(x)$ و نكتب:

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + x^{2n}\epsilon(x).$$

because $\arctan(0) = 0$, *then:* ولأن $\arctan(0) = 0$ فإن:

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + x^{2n+1}\epsilon(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

4.1.4 : Example - مثال

- النشر المحدود للدالة $\tan x$ عند 0 من الرتبة 5.

The limited expansion of the function $\tan x$ *at* 0 *is of order* 5.

Firstly: أولا:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\epsilon(x).$$

On the other hand من جهة أخرى

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\epsilon(x) = 1 + u$$

we set نضع

$$u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\epsilon(x).$$

In the calculation we need u^2 and u^3: نحتاج في الحساب u^2 و u^3 :

$$u^2 = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\epsilon(x)\right)^2 = \frac{x^4}{4} + x^5\epsilon(x)$$

then ثم

$$u^3 = x^5\epsilon(x).$$

so: وبالتالي:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos x} &= \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^3\epsilon(u) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + x^5\epsilon(x) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + x^5\epsilon(x). \end{aligned}$$

Finely في الأخير

$$\begin{aligned} \tan x &= \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} \\ &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\epsilon(x)\right) \cdot \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + x^5\epsilon(x)\right) \\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + x^5\epsilon(x). \end{aligned}$$

- النشر المحدود للدالة $\frac{1+x}{2+x}$ عند 0 من الرتبة 4.

The limited expansion of the function $\frac{1+x}{2+x}$ at 0 of order 4.

$$\begin{aligned} \frac{1+x}{2+x} &= (1+x)\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{2}(1+x)\left(1 - \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \left(\frac{x}{2}\right)^4 + o(x^4)\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{x^4}{32} + o(x^4), \end{aligned}$$

5.1.4 : Example - مثال

حساب النشر المحدود للدالة $h(x) = \sin\left(\ln(1+x)\right)$ عند 0 من الرتبة 3.

Calculate the limited expansion of the function $h(x) = \sin\big(\ln(1+x)\big)$ *at* 0 *of order* 3.

- نضع $f(u) = \sin u$ و $g(x) = \ln(1+x)$ ومنه:

We set $f(u) = \sin u$ *and* $g(x) = \ln(1+x)$*, from which:*

$$f \circ g(x) = \sin\big(\ln(1+x)\big) \quad \text{و} \quad g(0) = 0.$$

- نكتب النشر المحدودمن الرتبة 3 للدالة

We write the limited expansion of order 3 *for the function*

$$f(u) = \sin u = u - \frac{u^3}{3!} + u^3\epsilon_1(u)$$

من أجل u في جوار 0.

for u *in the vicinity of* 0.

نضع

We set

$$u = g(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_2(x)$$

من أجل x في جوار 0.

for x *in the vicinity of* 0.

- نحسب u^2:

We calculate u^2*:*

$$u^2 = \big(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_2(x)\big)^2 = x^2 - x^3 + x^3\epsilon_3(x)$$

و u^3 :

and u^3 *:*

$$u^3 = x^3 + x^3\epsilon_4(x).$$

ومنه:

then:

$$\begin{aligned} h(x) &= f \circ g(x) = f(u) \\ &= u - \frac{u^3}{3!} + u^3\epsilon_1(u) \\ &= \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right) - \frac{1}{6}x^3 + x^3\epsilon(x) \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + x^3\epsilon(x). \end{aligned}$$

2.4 الدالة الأصلية *Primitive functions*

1.2.4 : Definition - تعريف

لتكن $I=[a,b]$ مجال في $\mathbb{R}$ والتكن f دالة حيث :

Let $I=[a,b]$ is a non-empty open interval in $\mathbb{R}$ and let the function $f:I\to\mathbb{R}$.

نقول أن F دالة أصلية للدالة f على I حيث :

We call F a primitive function of f on I such that:

$$F:I\to\mathbb{R}$$

إذا تحقق ما يلي:

satisfying:

1- F قابلة للإشتقاق على المجال المفتوح I.

F can be derived in the open interval I.

2-

$$\forall x\in I,\quad F'(x)=f(x)$$

3.2.4 : Theorem - نظرية

إذا كانت F دالة أصلية للدالة $f:I\to\mathbb{R}$ على I فإن F مستمرة على I.

If F is a primitive function of $f:I\to\mathbb{R}$ on I, then F is continuous on I.

4.2.4 : Theorem - نظرية

لتكن الدالة $f:I\to\mathbb{R}$ حيث f تقبل دالة أصلية على I

Let $f:I\to\mathbb{R}$ has a primitive function on I. Then :

مجموعة الدوال الأصلية للدالة f هي

the set of primitive functions of f is:

$$\{F+c,c\in\mathbb{R}\},$$

حيث F دالة أصلية خاصة للدالة f.

where, F is a primitive function of f.

All primitive functions of f are obtained by shifting any primitive function of f by a constant.

نرمز بـ $\int f(t)dt$ للدالة الأصلية للدالة f ونكتب:

We denote by $\int f(t)dt$ the primitive function of f and we write:

$$F(x) = \int f(x)dx.$$

1.2.4 التكامل المحدود Definite integral

هناك نوعان من التكاملات هما: التكاملات المحدودة والتكاملات غير المحدودة.

There are two types of integrals: definite integrals and indefinite integrals.

لتكن الدالة $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ و المستمرة على المجال $[a, b]$ حيث $b \geq a$.

Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ the continues function on $[a, b]$ such that $b \geq a$.

يمكن تعريف التكامل بطريقة أخرى أكثر استعمالا في ايجاد قيم ثابتة للتكاملات من خلال النظرية التالية:

Integration can be defined in another way that is more used to find constant values for the integrals through following theorem:

5.2.4 : Theorem - نظرية

لتكن الدالة $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ المعرفة

Let $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ be the function defined as:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

هي دالة أصلية للدالة f يعني أن الدالة F قابلة للإشتقاق وتحقق :

a primitive function of f means that F derivable and satisfying :

$$F'(x) = f(x), \forall x \in [a, b].$$

2.2.4 : Definition - تعريف

نسمي التكامل المحدود للدالة f العدد الحقيقي الذي يعبر على المساحة المحصورة بمنحنى الدالة $f(x)$ من النقطة ذات الفاصلة $x = a$ إلى النقطة ذات الفاصلة $x = b$، الذي نرمز له بالرمز :

The definite integral of f is a number which represents the area under the curve $f(x)$ from $x = a$ to $x = b$ denoted by:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

العدد الحقيقي $F(b) - F(a)$ حيث F هي الدالة الأصلية للدالة f و نكتب

The real number $F(b) - F(a)$ where F the primitive function of f and we write:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

6.2.4 : Example - مثال

لنحسب التكاملات التالية:

Let's calculate the following integrals:

1− من أجل $f(x) = e^x$ لتكن $F(x) = e^x$ دالة أصلية لها، ومنه

For $f(x) = e^x$ let $F(x) = e^x$ be its primitive function, then

$$\int_0^1 e^x\,dx = \left[e^x\right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$

2− من أجل $g(x) = x^2$ لتكن $G(x) = \frac{x^3}{3}$ دالة أصلية لها، ومنه

For $g(x) = x^2$ let $G(x) = \frac{x^3}{3}$ be its primitive function, then

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

3–

$$\int_a^x \cos t\, dt = \big[\sin t\big]_{t=a}^{t=x} = \sin x - \sin a$$

دالة أصلية للدالة $\cos x$.

is a primitive function of $\cos x$.

4– إذا كانت دالة فردية تكون دالتها الأصلية دالة زوجية (نبرهن لاحقا) ونستنتج أن :

If the function is odd, then its primitive function is be an even function (proved later).

We conclude that:

$$\int_{-a}^{a} f(t)\, dt = 0.$$

3.4 خواص التكاملات *Properties of integrals*

الخصائص الرئيسية الثلاثة لحساب التكامل هي علاقة شال، إيجابية و خطية التكاملات.

The three main properties to integral calculus are the relation Chasles, positivity and linearity of integral.

1.3.4 علاقة شال Chasles relation

2.3.4 : Proposition - قضية

لتكن $a < c < b$. إذا كان f دالة قابلة للتكامل على $[a, c]$ و $[c, b]$ ، عندها تكون f قابلة للتكامل على $[a, b]$.

Let $a < c < b$. *If* f *integrable on* $[a, c]$ *and* $[c, b]$ *then* f *integrable on* $[a, b]$.

and we have: ولدينا:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

لدينا الخاصية التالية من أجل $a = b$:

We have the following proprieties, for $a = b$:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

و من أجل $a < b$:

and for $a < b$:

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

مثال - 7.3.4 : Example

لدينا:

We have:

$$\begin{aligned} \int_1^3 x^2dx &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} \\ \int_3^1 x^2dx &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_3^1 = \frac{1}{3} - \frac{27}{3} = -\frac{26}{3} \end{aligned}$$

$$\int_1^3 x^2dx = -\int_3^1 x^2dx.$$

2.3.4 إيجابية التكامل Positivity of integration

قضية - 3.3.4 : Proposition

ليكن $a \leq b$ عددين حقيقيين، f و g دالتين قابلتين للتكامل على المجال $[a, b]$.

Let $a \leq b$ two real numbers, f and g two functions have a primitive functions on $[a, b]$.

إذا كان $f \leq g$ فإن

If $f \leq g$ then:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

على وجه الخصوص ، يكون تكامل الدالة الموجبة إيجابيا:

In particular, the integral of a positive function is positive:

إذا كانت $f \geq 0$ فإن :

If $f \geq 0$ then:

$$\int_a^b f(x)\, dx \geq 0.$$

3.3.4 خطية التكامل Linearity of integration

4.3.4 : Proposition - قضية

لتكن f و g دالتين قابلتين للتكامل على المجال $[a, b]$

Let f and g two functions have a primitive on $[a, b]$

1− و منه $f+g$ دالة قابلة للتكامل و

then $f+g$ a function integrable and

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

2− من أجل كل عدد حقيقي λ الدالة λf هي قابلة للتكامل و لدينا

For all real number λ the function λf is integrable and we have:

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx.$$

من خلال هاتين النقطتين الأوليتين لدينا خطية التكامل:

From these first two points we have the linearity of integration:

من أجل كل عدد حقيقي λ و μ لدينا:

For all real numbers λ and μ we have:

$$\int_a^b \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx.$$

1.3.4 : Remark - ملاحظة

1) إذا كانت f و g دالتين قابلتين للتكامل على المجال $[a, b]$ فإن في معظم الأحيان

If f and g are integrable functions on $[a, b]$ then most of the time we have:

$$\int_a^b (fg)(x)\,dx \neq \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right).$$

2) إذا كانت f دالة قابلة للتكامل على المجال $[a, b]$ فإن $|f|$ دالة قابلة للتكامل على المجال $[a, b]$ أيضا و لدينا:

If f is an integrable function on $[a, b]$ then $|f|$ is also an integrable function on $[a, b]$

and we have:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

8.3.4 : Example - مثال

We have: لدينا:

$$\int_0^1 \left(7x^2 - e^x\right)\,dx = 7\int_0^1 x^2\,dx \;\; - \int_0^1 e^x\,dx = 7\frac{1}{3} \; - \; (e-1) = \frac{10}{3} - e$$

Using the calculations we saw earlier, we find: باستخدام الحسابات التي رأيناها سابقا نجد:

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

and و

$$\int_0^1 e^x dx = e - 1.$$

9.3.4 : Example - مثال

Let ليكن

$$I_n = \int_1^n \frac{\sin(nx)}{1+x^n}\,dx$$

Let's prove that $I_n \to 0$ for $n \to +\infty$. لنثبت أن $I_n \to 0$ لما $n \to +\infty$.

$$|I_n| = \left|\int_1^n \frac{\sin(nx)}{1+x^n}\,dx\right| \leq \int_1^n \frac{|\sin(nx)|}{1+x^n}\,dx \leq \int_1^n \frac{1}{1+x^n}\,dx \leq \int_1^n \frac{1}{x^n}\,dx$$

It remains only for us to calculate this last integral يبقى فقط حساب هذا التكامل الأخير

$$\int_1^n \frac{1}{x^n}\,dx = \int_1^n x^{-n}\,dx = \left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\right]_1^n = \frac{n^{-n+1}}{-n+1} - \frac{1}{-n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

لأن $n^{-n+1} \to 0$ و $\frac{1}{-n+1} \to 0$ لما $n \to +\infty$.

because $n^{-n+1} \to 0$ *and* $\frac{1}{-n+1} \to 0$ *for* $n \to +\infty$.

2.3.4 : Remark - ملاحظة

نلاحظ أنه حتى و لو كانت $f \cdot g$ قابلة للتكامل فإنه على العموم

We note that even if $f \cdot g$ is an integrable function, in general we have:

$$\int_a^b (fg)(x)dx \neq \Big(\int_a^b f(x)dx\Big)\Big(\int_a^b g(x)dx\Big).$$

على سبيل المثال، لتكن الدالة f و g المعرفتين كمايلي:

For example, let the functions f and g be defined as follows:

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in [0, \frac{1}{2}[\\ 0 & si\ non. \end{cases}$$

and و

$$g : [0,1] \to \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in [\frac{1}{2}, 1[\\ 0 & si\ non. \end{cases}$$

و منه $f(x) \cdot g(x) = 0$ من أجل كل $x \in [0,1]$، إذن:

Hence $f(x) \cdot g(x) = 0$ for each $x \in [0,1]$, then:

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx = 0$$

although رغم أن

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2} \quad and \quad \int_0^1 g(x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

4.4 تكامل بعض الدوال المألوفة *Primitive of usual functions*

$\int e^x dx = e^x + c$	on على $\mathbb{R}$
$\int \cos x dx = \sin x + c$	on على $\mathbb{R}$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	on على $\mathbb{R}$
$\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$ ، $(n \in \mathbb{N})$	on على $\mathbb{R}$
$\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ ، $(\alpha \in \mathbb{R}_{\{-1\}})$	on على $]0, +\infty[$
$\int \dfrac{1}{x} dx = \ln\|x\| + c$	on على $]0, +\infty[$ أو $]-\infty, 0[$
$\int shx\ dx = chx + c$، $\int chx\ dx = shx + c$	on على $\mathbb{R}$
$\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$	on على $\mathbb{R}$
$\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c \\ \dfrac{\pi}{2} - \arccos x + c \end{cases}$	on على $]-1, 1[$
$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \begin{cases} Argsh(x) + c \\ \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + c \end{cases}$	on على $\mathbb{R}$
$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \begin{cases} Argch(x) + c \\ \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + c \end{cases}$	on على $x \in]1, +\infty[$

5.4 طرق التكامل *Integration methods*

يقوم حساب التكامل على إيجاد التابع الأصلي للدالة التي نريد القيام بمكاملتها. وقد عرض غوتفريد فيلهيلم لايبنتز، في 13 نوفمبر 1675، أول عملية تكامل لحساب المساحة. وقد أسس لايبنتز علم التفاضل والتكامل الرياضياتي بشكل مستقل عن إسحاق نيوتن كما أن رموزه الرياضياتية ما زالت تستخدم بشكل شائع منذ أن تم نشرها والتعريف بها. ويوجد عدة طرق للتكامل منها: التكامل بالتجزئة، التكامل بالتعويض، التكامل بتغيير المتغير، ...

Integration is based on finding the primitive function of the function we want to integrate. On November 13, 1675, Gottfried Wilhelm Leibniz demonstrated the first integral for calculating area. Leibniz established the mathematical calculus independently of Isaac Newton, and his mathematical symbols are still in common use since they were first published. There are several methods of integration, including: integration by parts, integration by substitution, integration by changing the variable, ...

1.5.4 التكامل بالتجزئة Integration per partes

6.5.4 : Theorem - نظرية

لتكن u و v دالتين من الفئة $\mathcal{C}^1$ المعرفتين على المجال $[a,b]$ فإن :

Let u and v two functions of the class $\mathcal{C}^1$ defined on $[a,b]$, then :

$$\int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)\, v(x)\, dx.$$

صيغة التكامل بالتجزئة للدالة الأصلية هي نفسها ولكن بدون حدود:

The formula for the fractional integral for the primitive function is the same but without bounds:

$$\int u(x)v'(x)\, dx = [uv] - \int u'(x)v(x)\, dx.$$

10.5.4 : Example - مثال

لحساب التكامل

To calculate the integral

$$\int_0^1 xe^x\, dx$$

نضع $u(x) = x$ و $v'(x) = e^x$.

We put $u(x) = x$ and $v'(x) = e^x$.

نعلم أن الدالة $u'(x) = 1$ هي الدالة المشتقة للدالة $u(x)$

We know that the function $u'(x) = 1$ is the derivative of the function $u(x)$

و الدالة $v(x) = e^x$ هي الدالة الأصلية للدالة v'

and the function $v(x) = e^x$ is the primitive function of v'

و باستعمال صيغة التكامل بالتجزئة نجد:

by using the integration by parts formula we find:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xe^x dx &= \int_0^1 u(x)v'(x)\, dx \\
&= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)\, dx \\
&= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 1\cdot e^x\, dx \\
&= (1\cdot e^1 - 0\cdot e^0) - [e^x]_0^1 \\
&= e - (e^1 - e^0) \\
&= 1
\end{aligned}$$

11.5.4 : Example - مثال

To calculate the integral لحساب التكامل

$$\int_1^e x\ln x\, dx.$$

نضع هذه المرة $u(x) = \ln x$ و $v'(x) =$.

This time we put $u(x) = \ln x$ and $v'(x) = a$.

و منه الدالة $u' = \dfrac{1}{x}$ هي الدالة المشتقة للدالة $u(x)$ و الدالة $v = \frac{x^2}{2}$ هي الدالة الأصلية للدالة v'

The function $u' = \dfrac{1}{x}$ is the derivative of $u(x)$ and the function $v = \frac{x^2}{2}$ is the primitive of v'.

و باستعمال صيغة التكامل بالتجزئة نجد:

by using the integration by parts formula we find:

$$\begin{aligned}
\int_1^e \ln x\cdot x\, dx = \int_1^e uv' = [uv]_1^e - \int_1^e u'v = \left[\ln x\cdot\frac{x^2}{2}\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\frac{x^2}{2}\, dx \\
= \left(\ln e\frac{e^2}{2} - \ln 1\frac{1^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\int_1^e x\, dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e \\
= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}.
\end{aligned}$$

12.5.4 : Example - مثال

To calculate the integral لحساب التكامل

$$\int \arcsin x\, dx$$

لإيجاد دالة أصلية للدالة $\arcsin(x)$

to finds a primitive function of the $\arcsin(x)$ *function*

نجعلها من شكل جداء حيث نضع $u(x) = \arcsin(x)$ و $v'(x) = 1$،

we make it in the form of a product, we put $u(x) = \arcsin(x)$ *and* $v'(x) = 1$,

حيث لدينا $u'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ و $v(x) = x$،

where we have $u'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *and* $v(x) = x$,

ثم نطبق صيغة التكامل بالتجزئة فنجد

then we use the integration by parts formula we find:

$$\begin{aligned}\int 1\cdot\arcsin(x)dx &= [x\arcsin(x)] - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ &= [x\arcsin(x)] - \left[-\sqrt{1-x^2}\right] \\ &= x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + c.\end{aligned}$$

13.5.4 : Example - مثال

To calculate the integral حساب التكامل

$$\int x^2 e^x dx.$$

نضع $u(x) = x^2$ و $v'(x) = e^x$.

we put $u(x) = x^2$ *and* $v'(x) = e^x$.

نعلم أن الدالة $u'(x) = 2x$ هي الدالة المشتقة للدالة $u(x)$

We know that the function $u'(x) = 2x$ *is the derivative of* $u(x)$

و الدالة $v(x) = e^x$ هي الدالة الأصلية للدالة $v'(x)$

and $v(x) = e^x$ *is the primitive function of* $v'(x)$

و باستعمال صيغة التكامل بالتجزئة نجد:

and by using the integration by parts formula we find:

$$\int x^2 e^x\,dx = \left[x^2 e^x\right] - 2\int x e^x\,dx$$

نعيد التكامل بالتجزئة للمرة الثانية على الجزء الثاني من المساواة السابقة نجد:

Re-integrating by parts for the second time on the second part of the previous equations, *we find:*

$$\int xe^x\,dx = [xe^x] - \int e^x\,dx = (x-1)e^x + c,$$

Finally we find في الأخير نجد

$$\int x^2e^x\,dx = (x^2-2x+2)e^x + c.$$

2.5.4 التكامل بتغيير المتغير Change of variables

7.5.4 : Theorem - نظرية

لتكن f دالة معرفة على المجال $I=[a,b]$ و ليكن التطبيق $\varphi : J \to I$ من الفئة $\mathcal{C}^1$.

Let f be a function defined on $I=[a,b]$ and let the mapping $\varphi : J \to I$ be in class $\mathcal{C}^1$.

for all $a,b \in J$ we have: من أجل كل $a,b\in J$ لدينا:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$$

إذا كانت F دالة أصلية للدالة f فإن $F\circ\varphi$ هي الدالة الأصلية للدالة $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$.

if F is a primitive function of f then $F\circ\varphi$ is the primitive function of $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$.

in another way بصفة أخرى

$$\left(\int f(x)\,dx\right)\circ\varphi = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

أي أن الدالة الأصلية للدالة $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ تنتج من تركيب كل من الدالة f و φ.

that is, the primitive function $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ results from the combination of f and φ.

العبارة $\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$ تمثل فعلا تغيير للمتغير،

the statement $\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$ is actually a change of the variable,

or in a simplified form we put أو بصيغة مبسطة نضع

$$x = \varphi(t)$$

after derivation, we find ومنه نجد بعدها بالإشتقاق

$$\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$$

i.e. أي

$$dx = \varphi'(t)\, dt$$

what it gives us: ما يعطينا :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

14.5.4 : Example - مثال

Calculate the integral حساب التكامل

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)\, dx$$

by placing بوضع

$$\sin(x) = t \Longrightarrow \sin(x)' = \cos(x) = dt$$

ومنه نتغير حدود التكامل من x الى t كما يلي

Hence, the bounds of integration change from x to t as follows

$$\begin{aligned} x &= 0 \Longrightarrow t = \sin(0) = 0 \\ x &= \frac{\pi}{2} \Longrightarrow t = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{aligned}$$

from it we find ومنه نجد

$$\begin{aligned} x &= 0 \Longrightarrow \sin(0) = 0 \\ x &= \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)\, dx &= \int_0^1 t^2 dt \\ &= \left.\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$