ومنه المصفوفة A قابلة للتقطير.

So the matrix A is distillable.

4) في الأساس (X_1, X_2, X_3)، التشاكل الذاتي الممثل بالمصفوفة A (في الأساس القانوني) له المصفوفة:

In the base (X_1, X_2, X_3), the endomorphism represented by the matrix A (in the canonical basis) has the matrix:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

بصفة أخرى، نضع P مصفوفة العبور التي أشعة أعمدتها X_1، X_2 و X_3 على الترتيب أي:

In other words, we put P the transit matrix whose column vectors are X_1, X_2 and X_3 in order, i.e.:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

ومنه $P^{-1}AP = D$.

then, $P^{-1}AP = D$.

4.2 سلسلة التمارين رقم *Exercise series N° 2*

Exercise N°– 1 – تمرين رقم

لتكن A مصفوفة من $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ المعرفة كمايلي :

Let A be a matrix of $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ defined as follows:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) هل المصفوفة A قابلة للتقطير ؟

Is the matrix A diagonalizable?

2) أحسب $(A-2I_3)^2$ ثم $(A-2I_3)^n$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$. إستنتج A^n.
Calculate $(A-2I_3)^2$ then $(A-2I_3)^n$ for each $n\in\mathbb{N}$. Deduce A^n.

Solution - الحــل

1) حساب كثير الحدود المميز للمصفوفة A.
We compute the characteristic polynomial of the matrix A.

$$P_A(X)=\begin{vmatrix}-X & 1 & 0\\ -4 & 4-X & 0\\ -2 & 1 & 2-X\end{vmatrix}=(2-X)(X^2-4X+4)=(2-X)^3.$$

المصفوفة A تقبل قيمة ذاتية واحدة هي 2 إذا كان قطرية، فستكون مشابهة للمصفوفة $2.I_3$، لذلك ستكون مساوية لـ $2I_3$ وهذا ليس هو الحال ، لذلك لا يمكن أن تكون قابلة للتقطير.

The matrix A accepts a single eigenvalue is 2. If it were a diagonal, it would be similar to the matrix $2.I_3$, so it would be equal to $2I_3$ which is not the case, so it cannot be diagonalizable.

2) **لدينا:** — we have

$$(A-2I_3)^2=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-4&2&0\\-2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1&0\\-4&2&0\\-2&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

وبالتالي $(A-2I_3)^0=I$،
So $(A-2I_3)^0=I$,

$$(A-2I_3)^1=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-4&2&0\\-2&1&0\end{pmatrix}$$

و من أجل $n\geq 2$ **لدينا** $(A-2I_3)^n=0$.

and for $n\geq 2$ we have $(A-2I_3)^n=0$.

نلاحظ أن الفضاء الشعاعي الذاتي للقيمة 2

We note that the eigen-vectorial space associated to 2

$$\begin{aligned}E_{\lambda=2}&=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: 2x-y=0\right\}\\&=\left\{(x,2x,z): x,y\in\mathbb{R}^3\right\}\\&=\langle(1,2,0),(0,0,1)\rangle\end{aligned}$$

ذو بعد يختلف عن بعد الفضاء $\mathbb{R}^3$:

It has a dimension different from the space dimension of $\mathbb{R}^3$:

$$\dim(E_{\lambda=2}) = 2 \neq 3$$

وهذا ما يؤكد أيضا أن المصفوفة A غير قابلة للتقطير.

This also confirms that the matrix A is not diagonalizable.

نضع $B = A - 2I_3$ ولدينا $A = A - 2I_3 + 2I_3 = B + 2I_3$ حيث $B^n = 0$ من أجل $n \geq 2$. علاوة على ذلك ، المصفوفات B و $2I_3$ متبادلة، لذلك

We put $B = A - 2I_3$ and we have $A = A - 2I_3 + 2I_3 = B + 2I_3$ where $B^n = 0$, for $n \geq 2$. Furthermore, the matrices B and $2I_3$ are interchangeable, therefore:

$$A^n = (B + 2I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k (2I_3)^{n-k}$$

حيث C_n^k هي معاملات نيوتن ذات الحدين :

where C_n^k are Newton's binomial coefficients:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

ومع ذلك ، من أجل $k \geq 2$ لدينا $B^k = 0$ من أجل $n \geq 2$،

However, for $k \geq 2$ we have $B^k = 0$, for $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} A^n &= C_n^0 B^0 (2I_3)^n + C_n^1 B^1 (2I_3)^{n-1} \\ &= 2^n I_3 + 2^{n-1} n B \\ &= 2^n I_3 + 2^{n-1} n (A - 2I_3) \\ &= 2^n (1-n) I_3 + 2^{n-1} n A. \end{aligned}$$

then — ومنه

$$\begin{aligned} A^n &= 2^n(1-n)I_3 + n2^{n-1}A. \\ &= 2^n(1-n)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n2^{n-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(n-1)2^n & n2^{n-1} & 0 \\ -n2^{n+1} & (n+1)2^n & 0 \\ -n2^n & n2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercise N°– 2 – تمرين رقم

لتكن المصفوفة

Let the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1) أوجد كثير الحدود المميز للمصفوفة A.

Find the characteristic polynomial of the matrix A.

2) أثبت أن المصفوفة A قابلة للتقطير ثم أوجد المصفوفة D القطرية ومصفوفة العبور P العكوسة حيث $A = PDP^{-1}$.

Prove that the matrix A is diagonalizable and then find the diagonal matrix D and the invertible transit matrix P where $A = PDP^{-1}$.

3) أحسب A^n من أجل $n \in \mathbb{N}$.

Calculate A^n for $n \in \mathbb{N}$.

Solution - الحـــل

1) حساب كثير الحدود المميز P_A للمصفوفة A.

Compute the characteristic polynomial P_A of the matrix A.

$$\begin{aligned} P_A(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 0 & -1 \\ 2 & 4-X & 2 \\ -1 & 0 & 3-X \end{vmatrix} &= (4-X) \begin{vmatrix} 3-X & -1 \\ -1 & 3-X \end{vmatrix} \\ &= (4-X)(X^2-6X+8) \\ &= (4-X)(X-4)(X-2) \\ &= (2-X)(4-X)^2 \end{aligned}$$

2) كثير الحدود المميز P_A يقبل جذرين ومنه المصفوفة A تملك قيمتين ذاتيتين $\lambda_1 = 2$ قيمة ذاتية بسيطة و $\lambda_2 = 4$ قيمة ذاتية مضاعفة .

The characteristic polynomial P_A accepts two roots, of which the matrix A has two eigenvalues $\lambda_1 = 2$ simple eigenvalue and $\lambda_2 = 4$ a double eigenvalue.

لنحدد الفضاءات الشعاعية الذاتية المرافقة. ليكن

Let's define the associated eigen-vectorial spaces. So let

$$E_1 = \{V = (x, y, z) : AV = 2V\}$$

نقوم بحل الجملة:

We solve the system:

$$\begin{cases} 3x - z = 2x \\ 2x + 4y + 2z = 2y \\ -x + 3z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} z = x \\ y = -2x \end{cases}$$

الفضاءالشعاعي الذاتي E_1 المرافق للقيمة الذاتية 2 هو مستقيم شعاع توجيهه هو $e_1 = (1, -2, 1)$.

The eigen-vectorial space E_1 associated to the eigenvalue 2 is a straight line whose directional vector $e_1 = (1, -2, 1)$.

ليكن

Let

$$E_2 = \{v = (x, y, z) : Av = 4v\}$$

نقوم بحل الجملة:

We solve the system:

$$\begin{cases} 3x - z = 4x \\ 2x + 4y + 2z = 4y \\ -x + 3z = 4z \end{cases} \iff z = -x$$

الفضاءالشعاعي الذاتي E_2 المرافق للقيمة الذاتية 4 هو المستوي ذو المعادلة: $z = -x$ **التي يتم إعطاء أساسها ، على سبيل المثال من قبل الأشعة** $e_2 = (0, 1, 0)$ **و** $e_3 = (1, 0, -1)$.

The eigen-vectorial space E_2 associated to the eigenvalue 4 is the plane with the equation: $z = -x$ whose basis is given, for example by the vectors $e_2 = (0, 1, 0)$ and $e_3 = (1, 0, -1)$.

لاحظ أنه يمكننا القراءة مباشرة من المصفوفة A، حقيقة أن الشعاع $\vec{e}_2$ هو شعاع ذاتي مرتبطة بالقيمة الذاتية 4.

Note that we can read directly from the matrix A, the fact that the vector $\vec{e}_2$ is an eigenvector associated with the eigenvalue 4.

أبعاد الفضاءات الشعاعية الجزئية الذاتية تساوي تعدد القيم الذاتية المرافقة وبالتالي، الفضاء $\mathbb{R}^3$ يقبل أساس الأشعة الذاتية والمصفوفة A قابلة للتقطير.

The dimensions of the sub-eigen-vectorial spaces are equal to the multiplicity of the associated eigenvalues. Thus, the space $\mathbb{R}^3$ accepts the basis of the eigenvectors and the matrix A is diagonalizable.

نضع P مصفوفة العبور، ومنه:

We put P as the transit matrix, from which:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

و المصفوفة القطرية D المرافقة لها

and the associated diagonal matrix D

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

We have the relationship: **لدينا العلاقة:**

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

3) **حساب A^n من أجل** $n \in \mathbb{N}$.

Compute A^n for $n \in \mathbb{N}$.

من السؤال السابق لدينا $A = PDP^{-1}$ ومنه من أجل $n \in \mathbb{N}$، $A^n = P^{-1}D^nP$ و

From the previous question we have $A = PDP^{-1}$, then for $n \in \mathbb{N}$, $A^n = P^{-1}D^nP$ and

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix},$$

يبقى علينا حساب P^{-1}. ونعلم أن

We are left with the calculation of P^{-1} and we know that

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P}\,(P^*)^T$$

where أين

$$\det P = -2, \quad P^* = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad P^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

then, we have: ومنه لدينا:

$$\begin{aligned} A^n &= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2^{n-1}\begin{pmatrix} 2^n+1 & 0 & (1-2^n) \\ 2^{n+1}-2 & 2^{n+1} & 2^{n+1}-2 \\ (1-2^n) & 0 & 2^n+1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercise N°– 3 – تمرين رقم

Let the matrix A   لتكن المصفوفة A :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) أقطر المصفوفة A.

Diagonalize the matrix A.

2) عبر عن حلول الجملة التفاضلية $X' = AX$ في قاعدة الأشعة الذاتية وأرسم مساراتها.

Express the solutions of the differential system $X' = AX$ in the eigenvector rule and draw their paths.

Solution - الحــل

1) تقطير المصفوفة A.

Diagonalization of the A matrix.

كثير الحدود المميز

characteristic polynomial

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = X^2 - 1 = (X-1)(X+1).$$

المصفوفة A تقبل قيمتين ذاتيتين مختلفتين ومنه فهي قابلة للتقطير.

The matrix A accepts two different eigenvalues, therefore it is diagonalizable.

إيجاد الأساس الذاتي لـ A.

Finding the eigen-basic vectors of A.

ليكن $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$،

Let $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$Au = u \iff x = y \quad \text{و} \quad Au = -u \iff x = -y.$$

نلاحظ أن $u_1 = (1, 1)$ و $u_2 = (-1, 1)$ ، حيث : u_1 الشعاع الذاتي المرافق للقيمة الذاتية 1 و u_2 الشعاع الذاتي المرافق للقيمة الذاتية -1 هما مستقلان خطيا، لذا فيشكلان أساسا لـ $\mathbb{R}^2$ وبالتالي لدينا $A = PDP^{-1}$ حيث

Note that $u_1 = (1, 1)$ and $u_2 = (-1, 1)$, where: u_1 eigenvector of eigenvalue 1 and u_2 eigenvector of eigenvalue -1 are linearly independent, so they form the basis of $\mathbb{R}^2$ and thus we have $A = PDP^{-1}$ where

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2) ليكن Y حيث $PY = X$ لدينا إذن

Let Y where $PY = X$ then we have

$$X' = AX \iff PY' = APY \iff Y' = P^{-1}APY \iff Y' = DY.$$

حلول الجملة التفاضلية $X' = AX$ في أساس الأشعة الذاتية (u_1, u_2) هي حلول الجملة $Y' = DY$.
إذا كان $Y = (x, y)$ لدينا $x'(t) = x(t)$ و $y'(t) = -y(t)$ بالتالي حلول الجملة هي $x(t) = ae^t$ و $y(t) = be^{-t}$ حيث a و b ثوابت حقيقية. وتكون مساراتها في الأساس الذاتي (u_1, u_2) عبارة عن منحنيات ذات المعادلة $y = c/x$ مع $c \in \mathbb{R}$ فروع من القطوع الزائدة.

The solutions of the differential system $X' = AX$ in the eigenvector (u_1, u_2) are the solutions of the system $Y' = DY$. If $Y = (x, y)$ we have $x'(t) = x(t)$ and $y'(t) = -y(t)$ then the solutions to the system are $x(t) = ae^t$ and $y(t) = be^{-t}$ where a and b are real constants, and their trajectories in the eigenvalue (u_1, u_2) are curves of the equation $y = c/x$ with $c \in \mathbb{R}$ branches of hyperboles.

Exercise N°– 4 – تمرين رقم

لتكن المصفوفة A :

Let the matrix A

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

1) حلل كثير الحدود المميز لـ A إلى جداء عوامل ثم أوجد القيم الذاتية للمصفوفة.
Factorize the characteristic polynomial of A and then find the eigenvalues of the matrix.

2) أوجد الفضاءات الشعاعية الجزئية الذاتية لـ A.
Find the sub-eigen-vectorial spaces of A.

3) هل المصفوفة A قابلة للتقطير؟
Is the matrix A diagonalizable?

Solution - الحـــل

1) كتابة كثير الحدود المميز للمصفوفة A على شكل جداء عوامل: لدينا

Writing the characteristic polynomial of the matrix A as a product of factors: We have

$$P_A(X) = \begin{array}{|ccc|} C_1 & C_2 & C_3 \\ 3-X & 2 & 4 \\ -1 & 3-X & -1 \\ -2 & -1 & -3-X \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} C_1 \longleftarrow C_1 - C_3 & & \\ -1-X & 2 & 4 \\ 0 & 3-X & -1 \\ 1+X & -1 & -3-X \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} -1-X & 2 & 4 \\ 0 & 3-X & -1 \\ 0 & 1 & 1-X \end{vmatrix} \quad L_3 \longleftarrow L_3 + L_2$$

$$= (-1-X)(X^2-4X+4) = -(X+1)(X-2)^2$$

القيم الذاتية للمصفوفة A هي $\lambda_1 = -1$ قيمة ذاتية بسيطة و $\lambda_2 = 2$ قيمة ذاتية مضاعفة.

The eigenvalues of A are $\lambda_1 = -1$ a simple eigenvalue and $\lambda_2 = 2$ multiplicative eigenvalue.

2) **إيجاد الفضاءات الشعاعية الذاتية الجزئية للمصفوفة A.**

Find the eigen-sub-vectorial spaces of the matrix A.

بالنسبة للقيمة الذاتية -1 ليكن الفضاء الشعاعي الجزئي E_{-1} المعرف

For the eigenvalue -1 let the sub-vectorial space E_{-1} be defined as

$$E_{-1} = \{u \in \mathbb{R}^3,\ Au = -u\}.$$

let $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,　　**ليكن** $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$،

$$u \in E_{-1} \iff \begin{cases} 4x + 2y + 4z = 0 \\ -x + 4y - z = 0 \\ -2x - y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ x - 4y + z = 0 \end{cases}$$

الفضاء E_{-1} هو مستقيم شعاع توجيهه هو

The space E_{-1} is a straight line whose directional vector

$$u_1 = (1, 0, -1).$$

الفضاء الشعاعي الجزئي المرافق للقيمة 2 الفضاء الشعاعي E_2 المعرف

The sub-vectorial space associated with the value 2 is the vectorial space E_2 defined by

$$E_2 = \{u \in \mathbb{R}^3,\ Au = 2u\}.$$

let $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ليكن $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$u \in E_2 \iff \begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ -2x - y - 5z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

3) الفضاء E_2 هو مستقيم شعاع توجيهه

The space E_2 is a straight line whose directional vector

$$u_2 = (2, 1, -1).$$

الفضاء الشعاعي الجزئي E_2 ذو بعد 1، ومنه المصفوفة A ليست قابلة للتقطير.

The sub-vectorial space E_2 is of dimension 1, then the matrix A is not diagonalizable.

Exercise N°– 5 – تمرين رقم

نسمي مصفوفة $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ عشوائية إذا كانت معاملاتها أعداد حقيقية موجبة أو معدومة وإذا كان مجموع معاملات كل من أسطرها يساوي 1.

We call a matrix $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ random if its coefficients are positive or null real numbers and if the sum of the coefficients of each of its rows is 1.

1) أثبت أنه إذا كانت $\lambda \in \mathbb{C}$ قيمة ذاتية للمصفوفة A فإن $|\lambda| \leq 1$.

Prove that if $\lambda \in \mathbb{C}$ is an eigenvalue of A then $|\lambda| \leq 1$.

2) أثبت أن 1 قيمة ذاتية ثم أوجد الشعاع الذاتي المرافق له.

Prove that 1 is an eigenvalue and then find its eigenvector.

Solution - الحـــل

1) نفرض أن $\lambda \in C$ قيمة ذاتية للمصفوفة A وليكن z شعاع ذاتي مرافق للقيمة الذاتية. ليكن $i \in \{1, \dots, n\}$ حيث $|z_i| = \max_{j=1,\dots,n} |z_j|$. العمود رقم i من احداثيات المصفوفة Az تحقق $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} z_j$ وهذا يجب أن يساوي λz_i. بأخذ القيمة المطلقة واستخدام القاعدة الثلاثية نحصل على

Let $\lambda \in C$ be an eigenvalue of the matrix A and let z be an eigenvector of the eigenvalue. Let $i \in \{1, \dots, n\}$ where $|z_i| = \max_{j=1,\dots,n} |z_j|$. be column number i from the coordinates of the matrix Az, make $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} z_j$ and this should equal λz_i. By taking the absolute value and using the triple rule, we get

$$|\lambda||z_i| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}|z_j| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}|z_i| \leq |z_i|$$

حيث نستعمل أيضا $a_{i,j} \geq 0$ **و** $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$. **ومنه قد تحصلنا على** $|\lambda|\,|z_i| \leq |z_i|$. **لأن** $|z_i| \neq 0$ **(وإلا** z **يكون الشعاع المعدوم) هذا يعني أن** $|\lambda| \leq 1$.

We also use $a_{i,j} \geq 0$ and $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$. Then, we get $|\lambda|\,|z_i| \leq |z_i|$. because $|z_i| \neq 0$ (otherwise z is the zero vector). This means that $|\lambda| \leq 1$.

2) **يكفي أخذ** Enough take

$$z = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

كي نلاحظ أن $Az = z$. **وبالتالي يكون** z **شعاع ذاتي مرافق للقيمة الذاتية** 1.

To note that $Az = z$. So z is an eigenvector associated to the eigenvalue 1.

Exercise N°– 6 – تمرين رقم

اشرح بدون حساب سبب عدم إمكانية تقطير المصفوفة التالية : *Explain without calculating why the following matrix diagonalization is not possible:*

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 & 1 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

Solution - الحــل

المصفوفة A **مثلثية علوية قيمها الذاتية هي عناصر قطرها المتمثلة في قيمة واحدة هي** i. **إذا كانت المصفوفة** A **قابلة للتقطير فحتما نستطيع إيجاد مصفوفة عكوسة** $P \in GL_3(\mathbb{C})$ **تحقق:**

The matrix A is an upper triangular matrix whose eigenvalues are the elements of a single value i of diagonal. If the matrix A is diagonalizable then we can find an invertible matrix $P \in GL_3(\mathbb{C})$ check:

$$A = P(iI_3)P^{-1}.$$

لكن ولأن المصفوفة I_3 تبادلية مع جميع المصفوفات فإن:

However, because the matrix I_3 is commutative with all matrices, then:

$$A = iI_3PP^{-1} = iI_3 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

وليس هو الحال لهذا فإن المصفوفة A غير قابلة للتقطير.

this is not the case, so the matrix A is not diagonalizable.

Exercise N°– 7 – تمرين رقم

ليكن m عدد حقيقي f تشاكل ذاتي على $\mathbb{R}^3$ ذو المصفوفة A المعطاة في الأساس القانوني كما يلي:

Let m be a real number and f endomorphism of $\mathbb{R}^3$ with matrix A given in canonical basis as follows:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}.$$

1) **أوجد القيم الذاتية للتطبيق f ؟**

Find the eigenvalues of f?

2) **ماهي قيم m حتى يكون التطبيق الخطي قابل للتقطير ؟**

What are the values of m for a linear application to be diagonalizable?

3) **نفرض أن $m = 2$. أحسب A^k من أجل كل $k \in \mathbb{N}$.**

Suppose that $m = 2$. Calculate A^k for each $k \in \mathbb{N}$.

Solution : الحــل

1) إيجاد كثير الحدود المميز للمصفوفة A.

Find the characteristic polynomial of the matrix A.

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ 1 & X-2 & -1 \\ m-2 & 2-m & X-m \end{vmatrix} =_{C_1+C_2\to C_1} \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ X-1 & X-2 & -1 \\ 0 & 2-m & X-m \end{vmatrix} \\ &=_{L_2-L_1\to L_2} \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ 0 & X-2 & 0 \\ 0 & 2-m & X-m \end{vmatrix} = (X-1)\begin{vmatrix} X-2 & 0 \\ 2-m & X-m \end{vmatrix} \\ &= (X-1)(X-2)(X-m). \end{aligned}$$

القيم الذاتية لـ f هي 1 و 2 بشكل خاص إذا أخذنا $m=1$ أو 2 فإن f يقبل فقط قيمتين ذاتيتين.

The eigenvalues of f are 1 and 2 in particular if we take $m = 1$ or 2 then f accepts only two eigenvalues.

2) إذا كان $m \neq 1$ و $m \neq 2$ فإن f التشاكل الذاتي من $\mathbb{R}^3$ الذي يقبل ثلاث قيم ذاتية مختلفة : يكون هنا f قابل للتقطير و إذا كان $m=1$ فإن كثير الحدود المميز لـ f هو $(1-X)2(2-X)$. ويكون f قابل للتقطير فقط إذا كان بعد الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي للقيمة الذاتية 1 يساوي 2. لنبحث عن هاته الفضاءات الشعاعية الجزئية (تذكر أن $m=1$). من أجل $u=(x,y,z)$ لدينا:

If $m \neq 1$ and $m \neq 2$ then f is an endomorphism of $\mathbb{R}^3$ which has three different eigenvalues: here f is diagonalizable and if $m = 1$. The characteristic polynomial of f is $(1-X)2(2-X)$, and f is diagonalizable only if the dimension of the eigen-sub-vectorial space of eigenvalue 1 is 2. Let's find these eigen-sub-vectorial space (remember that $m = 1$). For $u = (x, y, z)$ we have:

$$f(u) = u \iff \begin{cases} z = 0 \\ -x+y+z = 0 \\ x-y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = x \\ y = x \\ z = 0 \end{cases}$$

نأخذ كأساس للفضاء $Ker(f-I)$ الشعاع $(1,1,0)$. بُعد الفضاء الذاتي $2 \neq 1$: ومنه المصفوفة غير قابلة للتقطير. نفرض الآن أن $m=2$. نبحث عن بُعد الفضاء $Ker(f-2I)$. لدينا من أجل $u=(x,y,z)$:

We take as a basis for the space $Ker(f-I)$ the vector $(1,1,0)$. eigen-sub-vectorial space dimension is $1 \neq 2$: of which the matrix is not diagonalizable. Now let $m=2$. We are looking for the dimension of space $Ker(f-2I)$. We have for $u=(x,y,z)$:

$$f(u)=2u \iff \begin{cases} -x+z &= 0 \\ -x+z &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= x \\ y &= y \\ z &= x \end{cases}$$

نأخذ كأساس للفضاء $Ker(f-2I)$ **الشعاعين** $(1,0,1)$ **و** $(0,1,0)$. **بشكل خاص بُعد الفضاء** $Ker(f-2I)$ **هو** 2 **و** f **هنا قابل للتقطير.**

We take as a basis for the space $Ker(f-2I)$ the vectors $(1,0,1)$ and $(0,1,0)$. Specifically the space dimension of $Ker(f-2I)$ is 2 and f here is diagonalizable.

3) **لنقطر** f. **وجدنا سابقا أساس ذاتي بالنسبة للقيمة الذاتية** 2. **من أجل القيمة الذاتية** 1 ($m=2$) **لدينا من أجل** $u=(x,y,z)$:

Let's diagonalize f. We previously found an eigenvector for the eigenvalue 2. For the eigenvalue 1, $(m=2)$ we have for $u=(x,y,z)$:

$$f(u)=u \iff \begin{cases} z &= 0 \\ -x+y+z &= 0 \\ z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= x \\ y &= x \\ z &= 0 \end{cases}$$

نأخذ كأساس للفضاء $Ker(f-I)$ **الشعاع** $(1,1,0)$. **ليكن** $u=(1,1,0)$، $v=(0,1,0)$ **و** $w=(1,0,1)$. **ومنه** (u,v,w) **أساس ذاتي لـ** f **في هذا الأساس مصفوفة** f **هي:**

We take as a basis for the space $Ker(f-I)$ the vector $(1,1,0)$. Let $u=(1,1,0)$, $v=(0,1,0)$ and $w=(1,0,1)$. From which (u,v,w) is an eigenvector of f. In this basis, the matrix f is:

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

لتكن P **مصفوفة العبور من الأساس القانوني للفضاء** $\mathbb{R}^3$ **الى الأساس** (u,v,w). **المصفوفة** P **المعطات بـ:**

Let P be the transit matrix of the canonical basis of space $\mathbb{R}^3$ to the base (u, v, w). The matrix P is given by:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ولدينا $A = PDP^{-1}$. يجب أن نحسب P^{-1}. نجد:

We have $A = PDP^{-1}$. We have to calculate P^{-1}. We find:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

من $A = PDP^{-1}$ نستنتج بالتراجع أن $A^k = PD^kP^{-1}$. لكن و لأن المصفوفة D قطرية لدينا:

From $A = PDP^{-1}$, we conclude bu induction that $A^k = PD^kP^{-1}$. But since the matrix D is diagonal, we have:

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$

After the calculations we find in the latter

بعد الحسابات نجد في الأخير

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^k - 1 \\ 1 - 2^k & 2^k & 2^k - 1 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$