# الفصل الخامس

# المعادلات التفاضلية *Differential equations*

## فهرس الفصل



---

تعتبر المعادلات التفاضلية أحسن وسيلة لوصف معظم المسائل الهندسية والرياضية والعلمية على حد سواء، مثل وصف عمليات انتقال الحرارة أو سيلان الموائع، الحركة الموجية و الدوائر الإلكترونية و استخدامها في مسائل الهياكل الإنشائية للمادة أو الوصف الرياضي للتفاعلات الكيميائية.

Differential equations are the best way to describe most engineering, mathematical and scientific issues alike, such as describing heat transfer processes or fluid flow, wave motion and electronic circuits and using them in issues of the structural structures of matter or the mathematical description of chemical reactions.

## 1.5 مفاهيم أساسية *Basic concepts*

**يتضمن هذا الفصل مجموعة من التعريفات والمفاهيم في المعادلات التفاضلية ، ومن أهم تلك المفاهيم :**

This chapter includes a set of definitions and concepts in differential equations, the most important of which are:

**1.1.5 : Definition - تعريف**

المعادلة التفاضلية هي كل معادلة تحوي على تفاضلات أو مشتقات لتابع أو أكثر بالنسبة لمتحولات وهي من الشكل :

*A differential equation is every equation that contains differentials or derivatives of one or more functions with respect to variables and is of the form:*

$$(E) \qquad F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

**1.1.5 : Example - مثال**

$$\frac{dx}{dy}z + ydx = u$$

**وتصنف المعادلة التفاضلية الى :**

The differential equation is classified into:

**1ـ معادلة تفاضلية عادية : هي معادلة تفاضلية تحوي على مشتقات أو تفاضلات عادية لتابع أو أكثر**

Ordinary differential equation: It is a differential equation that contains derivatives or ordinary differentials of one or more variables.

**2.1.5 : Example - مثال**

$$ydx + xdy = e^z.$$

2- معادلة تفاضلية جزئية : هي معادلة تفاضلية تحوي على مشتقات أو تفاضلات جزئية لتابع أو أكثر

Partial differential equation: It is a differential equation that contains derivatives or partial differentials of one or more variables.

**3.1.5 : Example - مثال**

$$\frac{\partial x}{\partial y} = zx.$$

3- المعادلة التفاضلية العادية الخطية : هي المعادلة التي تكون خطية بالنسبة لكل من التابع أو التوابع ومشتقاتها و لا تحوي على جداءات لها .

For the linear ordinary differential equation: it is the equation that is linear with respect to each of the function(s) and their derivatives does not contain their products.

4- المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية : هي المعادلة التي تكون خطية بالنسبة للمشتقات الجزئية للتابع أو التوابع الموجودة.

Linear partial differential equation: It is the equation that is linear with respect to the partial derivatives of the existing function or functions.

**1.1.5 : Remark - ملاحظة**

1- ان مرتبة المعادلة هي مرتبة أعلى مشتق موجود فيها.

*The order of an equation is the order of the highest derivative present in it.*

2- ويمكن تحويل المعادلة التفاضلية من شكل لآخر لتسهيل حلها.

*The differential equation can be converted from one form to another to facilitate its solution.*

## 1.1.5 الرتبة والدرجة Order and degree

### الرتبة Order

**تعريف - Definition : 2.1.5**

رتبة المعادلة التفاضلية : هو رتبة المشتق الأعلى (المعروف أيضا باسم المعامل التفاضلي) الموجود في المعادلة.

*The order of a differential equation : is the order of the highest derivative (also known as differential coefficient) present in the equation.*

**مثال - Example : 4.1.5**

$$\frac{dy}{dx} + y^3 = \cos(x)$$

يحتوي فقط على المشتق الأول $\frac{dy}{dx}$، أي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى.

*Contains only the first derivative $\frac{dy}{dx}$, which is a first order differential equation.*

**مثال - Example : 5.1.5**

$$\frac{d^3x}{dx^3} + 3x\frac{dy}{dx} = e^y$$

في هذه المعادلة، رتبة أعلى مشتق هو 3، ومنه، هذه المعادلة تفاضلية من الدرجة الثالثة.

*In this equation, the order of the highest derivative is 3 hence, this is a third order differential equation.*

### الدرجة Degree

**تعريف - Definition : 3.1.5**

يتم تمثيل درجة المعادلة التفاضلية بقوة المشتق الأعلى رتبة في المعادلة التفاضلية المحددة.

*The degree of the differential equation is represented by the power of the highest order derivative in the given differential equation.*

**يجب أن تكون المعادلة التفاضلية معادلة متعددة الحدود في المشتقات للدرجة المراد تحديدها.**

The differential equation must be a polynomial equation in derivatives for the degree to be defined.

**6.1.5 : Example - مثال**

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + \left(\frac{d^2y}{d^2x}\right)^3 + y = \cos(x)$$

هنا، الأس لأعلى هو للمشتق من الرتبة 2 والمعادلة التفاضلية المعطاة هي معادلة متعددة الحدود في المشتقات. إذن فهي معادلة تفاضلية عادية من الرتبة الثانية و الدرجة الثالثة.

*Here, the up exponent is of the derivative of the highest order derivative is 2 and the given differential equation is a polynomial equation in derivatives.*

*So it is a Second Order Three Degree ordinary differential equation*

## 2.1.5 الشرط الإبتدائي والنهائي

في المسائل المطلوب منك التحقق من حل المعادلة التفاضلية العادية، يمكنك أيضا أيجاد الثوابت الإختيارية الظاهرة في الحل العام للمعادلة، وذلك يتم عن طريق الشروط الإبتدائية التي تعطى في البداية .

In the problems you are required to check the solution of the ordinary differential equation, you can also find the optional constants that appear in the general solution to the equation, and this is done through the initial conditions that are given at the beginning.

وفي حال وجود حل عام لمعادلة تفاضلية من الرتبة الثانية مثلا، تحتوي على ثابتين أختياريين، يلزم لتحديد الثابتين شرطين إضافيين للمعادلة.

In the event that there is a general solution to a differential equation of the second order, for example, that contains two optional constants, two additional conditions for the equation are required to determine the constants.

إذا أعطى الشرطان عند نقطتين مختلفتين $y(x_1) = y_1$، $y(x_2) = y_2$ كانت الشروط شروطا حدية ، وسميت المعادلة التفاضلية بالإضافة إلى الشروط الحدية: مسألة القيمة الحدية .

If the two conditions are given at two different points $y(x_1) = y_1$ and $y(x_2) = y_2$, then the conditions are boundary conditions, and the differential equation is called in addition to the boundary conditions: the issue of value limitation.

## 2.5 Solving dif. equations حل المعادلات التفاضلية

**يمكن أن تكون المعادلة التفاضلية طريقة طبيعية جدا لوصف شيء ما. لكنها ليست مفيدة للغاية كما هي.**

A Differential Equation can be a very natural way of describing something. But it is not very useful as it is.

**نحن بحاجة لحلها!**

We need to solve it!

**نحلها عندما نجد الدالة $y$ (أو مجموعة الدوال $y$) التي تحقق المعادلة، ومن ثم يمكن استخدامها بنجاح.**

We solve it when we discover the function y (or set of functions y) that satisfies the equation, and then it can be used successfully.

**4.2.5 : Definition - تعريف**

نسمي الدالة $y = y(x)$ حلا للمعادلة التفاضلية:

*We call the function $y = y(x)$ a solution to the differential equation:*

$$F(x, y, y', y'', ..., y^n)$$

*if* إذا كانت :

1- *is $n$ times differentiable.* 1- قابلة للأشتقاق $n$ مرة .

2- *checks the differential equation i.e.:* 2- تحقق المعادلة التفاضلية أي :

$$F(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0$$

**لهذا لنلقي نظرة على بعض الأنواع المختلفة من المعادلات التفاضلية وكيفية حلها.**

So let's look at some different types of differential equations and how to solve them:

### 1.2.5 فصل المتغيرات Separation of Variables

**فصل المتغيرات هي طريقة خاصة لحل بعض المعادلات التفاضلية،**

Separation of variables is a special method to solve some differential equations,

#### متى يمكن استخدامها؟ When can i use it?

**يمكن استخدام فصل المتغيرات عندما: يمكن نقل جميع المصطلحات $y$ (بما في ذلك $dy$) إلى جانب واحد من المعادلة ، وكل مصطلحات $x$ (بما في ذلك $dx$) إلى الجانب الآخر.**

Separation of Variables can be used when: all the $y$ terms (including $dy$) can be moved to one side of the equation, and all the $x$ terms (including $dx$) to the other side.

**مثال - Example : 7.2.5**

في هذا المثال سوف نوضح مراحل حل معادلة تفاضلية بطريقة فصل المتغيرات.

*In this example, we will explain the stages of solving a differential equation by separating the variables.*

$$\frac{dy}{dx} = ky$$

الخطوة 1: نفصل بين المتغيرات عن طريق تحريك كل حدود $y$ إلى جانب واحد من المعادلة وكل حدود $x$ إلى الجانب الآخر:

*Step 1: Separate the variables by moving all the $y$ terms to one side of the equation and all the $x$ terms to the other side:*

$$\frac{dy}{y} = kdx$$

الخطوة 2: تكامل طرفي المعادلة بشكل منفصل:

*Step 2: Integrate both sides of the equation separately.*

$$\int \frac{dy}{y} = \int kdx \Longrightarrow \ln(y) + C = kx + D$$

نستخدم مثلا $C$ كثابت التكامل. ونستخدم $D$ للطرف الآخر ، لأنه ثابت مختلف.

*$C$ is the constant of integration. And we use $D$ for the other, as it is a different constant.*

الخطوة 3: التبسيط: يمكننا تحويل الثابتين إلى ثابت واحد $(a = D - C)$

*Step 3 Simplify: We can roll the two constants into one* $(a = D - C)$

$$\ln(y) = kx + a \Rightarrow y = ce^{kx}, \quad (c = e^a)$$

هذا النوع من المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى، تظهر في العديد من أمثلة الواقع الحقيقي.
*This type of differential equations are of the first order, appearing in many real-world examples.*

**8.2.5 : Example - مثال**

*Solve the following differential equation:* حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$xy^2dx + (1 - x^2)dy = 0.$$

الحل : نقسم طرفي المعادلة على $y^2(1 - x^2)$ فنحصل على :
*Solution: We divide both sides of the equation by* $y^2(1 - x^2)$*, so we get:*

$$\frac{xdx}{1 - x^2} + \frac{dy}{y^2} = 0$$

والتي هي معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتغيرات وطريقة حلها تكون كمايلي : بتكامل الطرفين
*Which is a differential equation that can separate the variables and the way to solve it is as follows: By integrating the two sides*

$$\begin{aligned} \int \frac{xdx}{1 - x^2} + \int \frac{dy}{y^2} &= 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}\ln\left(x^2 - 1\right) - \frac{1}{y} = c \\ &\Rightarrow \ln\left(x^2 - 1\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{y} = c \\ &\Rightarrow \frac{1}{y} = \ln\left(x^2 - 1\right)^{-\frac{1}{2}} - c, \end{aligned}$$

*So the solution to the differential equation is* و بالتالي حل المعادلة التفاضلية هو

$$y = \left(\ln\left(x^2 - 1\right)^{-\frac{1}{2}} - c\right)^{-1}.$$

### 2.2.5 Linear differential equation المعادلة التفاضلية الخطية

**5.2.5 : Definition - تعريف**

تكون المعادلة التفاضلية خطية إذا كان المتغيرالتابع ومشتقاته في المعادلة من الدرجة الأولى .

*The differential equation is linear if the dependent variable and its derivatives in the equation are of first degree.*

فالصورة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبةالأولى تكون :

*The general form of a linear differential equation of the first order is:*

$$\frac{dy}{dx} + yP\left(x\right) = Q\left(x\right)$$

*It is called linear in $y$.* وتسمى خطية في $y$.

أما المعادلة الخطية في $x$ فإنها على الصورة :

*As for the linear equation in $x$, it takes the form:*

$$\frac{dx}{dy} + xa\left(y\right) = b\left(y\right)$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى من الشكل :

*The general solution of the differential equation of the first order is of the form:*

$$y(x) = e^{-I(x)}\left(\int e^{I(x)}Q\left(x\right)dx + c\right)$$

*where :* حيث :

$$I\left(x\right) = \int P\left(x\right)dx$$

*and $c$ is a constant.* و $c$ عدد ثابت .

**9.2.5 : Example - مثال**

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية :

*Find the general solution to the following differential equation:*

$$(y + y^2)dx - (y^2 + 2xy + x)dy = 0$$

الحل : المعادلة خطية في $x$ ، حيث يمكن وضعها على الشكل التالي :

*The solution :*

*The equation is linear in $x$, so it can be put in the following form:*

$$\frac{dx}{dy}+xa\left(y\right)=b\left(y\right)$$

بقسمة طرفي المعادلة على $dy(y+y^2)$ نجد

*Dividing both sides of the equation by $dy(y+y^2)$, we get*

$$\frac{dx}{dy}-\frac{y^2+2xy+x}{y+y^2}=0$$

*so that* أي أن

$$\frac{dx}{dy}-\frac{y^2}{y+y^2}-\frac{2xy+x}{y+y^2}=0\Longrightarrow\frac{dx}{dy}-\frac{2y+1}{y+y^2}x=\frac{y^2}{y+y^2}$$

بمقارنة المعادلة الناتجة مع المعادلة الأولى نجد

*By comparing the resulting equation with the first equation, we find*

$$b\left(y\right)=\frac{y^2}{y+y^2},\qquad a\left(y\right)=-\frac{2y+1}{y+y^2}$$

*Then* ومنه

$$I\left(y\right)=e^{-\int\frac{2y+1}{y+y^2}dy}=e^{\ln\left(\frac{1}{y+y^2}\right)}=e^{-\ln\left(y+y^2\right)}=\frac{1}{y+y^2}$$

*and* و

$$\int I\left(y\right)b\left(y\right)dy=\int\frac{1}{y+y^2}\frac{y}{y+1}dy=\int\frac{1}{\left(y+1\right)^2}dy=-\frac{1}{y+1}$$

*be the solution of the equation* يكون حل المعادلة

$$I\left(y\right)x=\int I\left(y\right)b\left(y\right)dy+c$$

$$\frac{1}{y+y^2}x=-\frac{1}{y+1}+c$$

*so* أي

$$x=-y+c(y^2+y),c\in\mathbb{R}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية.

*It is the general solution to the differential equation.*

### 3.2.5 Homogeneous equations المعادلات المتجانسة

**تكون المعادلة التفاضلية من الدرجة الأولى متجانسة عندما يمكن أن تكتب على الشكل:**

A first order Differential Equation is Homogeneous when it can be in this form:

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

**يمكننا حلها باستخدام فصل المتغيرات ولكن أولاً ننشئ متغيرا جديد** $v = \frac{y}{x}$.

We can solve it using separation of variables but first we create a new variable $v = \frac{y}{x}$.

**باستخدام التحويل** $y = vx$ **و** $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ **يمكننا حل المعادلة التفاضلية.**

Using $y = vx$ and $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ we can solve the differential equation.

**هذا المثال سيوضح كيف يتم ذالك.**

This example shows how this is done.

**10.2.5 : Example - مثال**

*Solve* أوجد حلول

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

*Can we get it in $F(\frac{y}{x})$ style?* هل يمكننا كتابتها على الشكل $F(\frac{y}{x})$؟

*We have:* لدينا:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + y^2}{xy} &= \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \\ &= \left(\frac{y}{x}\right)^{-1} + \frac{y}{x} \end{aligned}$$

*So* وبالتالي

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)^{-1} + \frac{y}{x}.$$

*Now use separation of variables* نستعمل الآن فصل المتغيرات

$$y = vx \text{ and } \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} = v^{-1} + v$$

$$\Longrightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = v^{-1}$$
$$\Longrightarrow \quad vdv = \frac{1}{x}dx$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{v^2}{2} = \ln x + \ln c$$
$$\Longrightarrow \quad v^2 = 2(\ln cx) \Longrightarrow v = \pm\sqrt{2(\ln cx)}$$

*Now substitute back* $v = \frac{y}{x}$ — بالتعويض بـ $v = \frac{y}{x}$

$$\frac{y}{x} = \pm\sqrt{2(\ln cx)} \Rightarrow y = x \pm \sqrt{2(\ln cx)}.$$

## 4.2.5 معادلة برنولي Bernoulli equation

**معادلة برنولي التفاضلية هي نوع من المعادلات التفاضلية غير الخطية من الدرجة الأولى حيث يظهر المتغير التابع في المعادلة في كل من الأشكال الخطية وغير الخطية. يتم إعطاء الشكل العام لمعادلة برنولي التفاضلية من خلال:**

A Bernoulli differential equation is a type of nonlinear first-order differential equation where the dependent variable appears in the equation in both linear and nonlinear forms. The general form of a Bernoulli differential equation is given by:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n$$

**حيث** $n \neq 1$.

where $n \neq 1$.

**فيما يلي مخطط عام لحل معادلة برنولي التفاضلية:**

**حوّل المعادلة إلى معادلة تفاضلية قابلة للفصل بقسمة كلا الطرفين على** $y^n$ **وإجراء الاستبدال** $z = y^{1-n}$.

Here is a general outline for solving a Bernoulli differential equation:
Transform the equation into a separable differential equation by dividing both sides by $y^n$ and making the substitution $z = y^{1-n}$.

$$\frac{dz}{dx} + \frac{p(x)}{1-n}z = \frac{q(x)}{1-n}$$

كامل طرفي المعادلة التفاضلية القابلة للفصل.

Integrate both sides of the resulting separable differential equation.

$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{p(x)}{1-n}dx + C_1$$

$$\ln|z| = \int \frac{p(x)}{1-n}dx + C_1$$

$$|z| = e^{\int \frac{p(x)}{1-n}dx + C_1}$$

حل من أجل $z$ ثم من أجل $y$ باستخدام التعويض الأصلي $z = y^{1-n}$.

Solve for $z$ and then for $y$ by using the original substitution $z = y^{1-n}$.

$$y = \pm\left(\frac{e^{\int \frac{p(x)}{1-n}dx + C_1}}{C_2}\right)^{\frac{1}{1-n}}$$

**11.2.5 : Example - مثال**

*Let the differential equation* لتكن المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} + yx^5 = x^5y^7$$

هي معادلة برنولي مع $P(x) = x^5$ و $Q(x) = x^5$ و $n = 7$ ، لنجرب طريقة التعويض:

*It is a Bernoulli equation with $P(x) = x^5$, $Q(x) = x^5$, and $n = 7$, let's try the substitution:*

$$u = y^{1-n} = y^{-6}$$

*In terms of $y$ that is:* بعبارة $y$ تعطينا:

$$y = u^{-1/6}$$

نشتق $y$ بالنسبة إلى $x$:

*Differentiate $y$ with respect to $x$:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{6}u^{-7/6}\frac{du}{dx}.$$

نعوض $\frac{dy}{dx}$ و $y$ في المعادلة الأصلية

*Substitute $\frac{dy}{dx}$ and $y$ into the original equation*

$$\frac{-1}{6}u^{-7/6}\frac{du}{dx} + x^5u^{-1/6} = x^5u^{-7/6}$$

*Multiply all terms by $-6u^{7/6}$* نضرب كل الأطراف في $-6u^{7/6}$

$$\frac{du}{dx} + x^5u = -6x^5.$$

لدينا الآن معادلة يمكن حلها.

*We now have an equation we can hopefully solve.*

### 5.2.5 معادلة ريكاتي Riccati equation

**معادلة ريكاتي التفاضلية هي معادلة تفاضلية غير خطية من الدرجة الأولى تستخدم في نظرية التحكم وتحليل الأنظمة الديناميكية ونظرية النظام.**
**تتمثل إحدى طرق حل معادلة ريكاتي التفاضلية في تحويلها إلى معادلة تفاضلية خطية باستخدام تغيير المتغيرات. غالبا ما يشار إلى هذا باسم ْطريقة الاستبدالْ. فيما يلي مخطط عام للخطوات المتضمنة:**

A Riccati differential equation is a nonlinear first-order differential equation used in control theory, dynamic systems analysis, and system theory.
One way to solve a Riccati differential equation is by transforming it into a linear differential equation using a change of variables. This is often referred to as the "substitution method". Here is a general outline of the steps involved:

**قم باستبدال المتغير : $y = u'/u$ ، حيث $u$ متغير جديد.**
**عوّض $y$ في معادلة ريكاتي التفاضلية للحصول على معادلة تفاضلية خطية بدلالة $u$.**
**حل المعادلة التفاضلية الخطية باستخدام التقنيات المعروفة، مثل فصل المتغيرات أو طريقة المعاملات غير المحددة.**

Make a substitution of the form: $y = u'/u$, where u is a new variable.
Substitute y into the Riccati differential equation to obtain a linear differential equation in terms of $u$.
Solve the linear differential equation for u using standard techniques, such as separation of variables or the method of undetermined coefficients.

**بمجرد العثور على $u$ ، يمكن العثور على $y$ باستخدام المتغير الأصلي $y = u'/u$.**
**أخيرا ، يمكن إيجاد الحل العام لمعادلة ريكاتي التفاضلية الأصلية بدمج $y$ لإيجاد دالة لـ $u$ ، ثم إيجاد $u'$ من $y$.**

Once $u$ has been found, $y$ can be found using the original substitution $y = u'/u$.
Finally, the general solution to the original Riccati differential equation can be found by integrating y to find a function for $u$, and then finding $u'$ from $y$.

**معادلة ريكاتي تأخذ الشكل:**

A Riccati equation has this form:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y^2 + q(x)\,y + r(x) = 0 \qquad (1)$$

**إذا كان $p(x) = 0$ ، فإن المعادلة $(1)$ معادلة خطية ؛**

If $p(x) = 0$; then equation (1) is linear;

**إذا كان $r(x) = 0$ ؛ فإن المعادلة $(1)$ هي معادلة برنولي ؛**

If $r(x) = 0$; then equation (1) is Bernoulli;

**إذا كان $p$؛ $q$ و $r$ ثوابت ، فإن المعادلة $(1)$ ذات متغيرات قابلة للفصل**

If $p$; $q$ and $r$ are constants, then equation (1) is separable

$$\frac{dy}{py^2 + qy + r} = dx$$

**12.2.5 : Example - مثال**

حل المعادلة التفاضلية

*Solve the differential equation*

$$y' = y + y^2 + 1.$$

المعادلة المعطاة هي معادلة ريكاتي بسيطة ذات معاملات ثابتة. هنا يمكن فصل المتغيرين $x$ و $y$ بسهولة، لذا يمكن الحصول على الحل العام للمعادلة من خلال

*The given equation is a simple Riccati equation with constant coefficients. Here the variables $x$*

*and $y$ can be easily separated, so the general solution of the equation is given by*

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= y+y^2+1, \Rightarrow \frac{dy}{y+y^2+1}=dx,\\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y+y^2+1}=\int dx,\\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y^2+y+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\int dx,\\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\int dx,\\ &\Rightarrow \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\arctan\frac{y+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=x+C,\\ &\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2y+1}{\sqrt{3}}=x+C.\end{aligned}$$

## 6.2.5 معادلة من الرتبة الثانية Second order equation

**يمكننا حل معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية من النوع:**

We can solve a second order differential equation of the type:

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=f(x)}$$

**حيث $P(x)$ و $Q(x)$ و $f(x)$ هي دوال في $x$ باستخدام:**

where $P(x)$, $Q(x)$ and $f(x)$ are functions of $x$, by using:

– **طريقة المعاملات غير المحددة التي تعمل فقط عندما يكون $f(x)$ متعدد الحدود ، أو الأسي، أو الجيب، أو جيب التمام، أو تركيبة خطية منهما.**

Undetermined coefficients which only works when $f(x)$ is a polynomial, exponential, sine, cosine or a linear combination of those.

– **طريقة الثوابت المتغيرة التي تعمل على مجموعة واسعة من الدوال.**

Variation of parameters which works on a wide range of functions.

**هنا نبدأ بتعلم الحالة التي يكون فيها $f(x)=0$ (وهذا يجعلها معادلة متجانسة):**

Here we begin by learning the case where $f(x)=0$ (this makes it "homogeneous"):

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=0.}$$

وأيضا حيث تكون الدالتان $P(x)$ و $Q(x)$ ثوابت $a$ و $b$:

and also where the functions $P(x)$ and $Q(x)$ are constants $a$ and $b$:

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0.}$$

سنستخدم خاصية إشتقاق الدالة الأسية:

We are going to use a special property of the derivative of the exponential function:

في أي نقطة، مشتق $e^x$ يساوي قيمة $e^x$:

At any point the slope (derivative) of $e^x$ equals the value of $e^x$ :

And when we introduce a value $r$ like this: وعندما ندخل القيمة $r$ مثل:

$$f(x) = e^{rx}.$$

We find: نجد:

$$f'(x) = re^{rx} \quad and \quad f'(x) = r^2e^{rx}$$

بعبارة أخرى ، فإن المشتقات الأولى والثانية لـ $f(x)$ كلاهما من مضاعفات $f(x)$. هذا سوف يساعدنا كثيرا!

In other words, the first and second derivatives of $f(x)$ are both multiples of $f(x)$. This is going to help us a lot!

**1.2.5 : Theorem - نظرية**

*Let the differential equation* لتكن المعادلة التفاضلية

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = Q(x)}$$

ولتكن $\Delta = a^2 - 4b$ مميز المعادلة المميزة لها

*and let $\Delta = a^2 - 4b$ be the discriminant of the characteristic equation of her*

$$\boxed{r^2 + ar + b = 0}$$

1)− إذا كان $\Delta > 0$ و كانت $r_1$ و $r_2$ جذوراً للمعادلة المميزة فإن الحل العام لها هو:

*If $\Delta > 0$ and $r_1$ and $r_2$ are roots of the characteristic equation, the general solution is:*

$$\boxed{y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} + y_p(x)}$$

حيث $C_1$ و $C_2$ ثوابت و $y_p(x)$ حل خاص.

*where $C_1$ and $C_2$ are constants and $y_p(x)$ a particular solution.*

2)– إذا كان $\Delta = 0$ و كان $r$ جذراً مضاعفا للمعادلة المميزة فإن الحل العام لها هو:

*If $\Delta = 0$ and $r$ is a double root of the characteristic equation, then the general solution is:*

$$\boxed{y = e^{rx}\left(C_1 + C_2 x\right) + y_p(x)}$$

حيث $C_1$ و $C_2$ ثوابت و $y_p(x)$ حل خاص.

*where $C_1$ and $C_2$ are constants and $y_p(x)$ a particular solution.*

3)– إذا كان $\Delta < 0$ و كان $r = \alpha + i\beta$ جذراً للمعادلة المميزة فإن الحل العام لها هو:

*If $\Delta < 0$ and $r = \alpha + i\beta$ is a root of the characteristic equation, then the general solution is:*

$$\boxed{y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)\right) + y_p(x)}$$

حيث $C_1$ و $C_2$ ثوابت و $y_p(x)$ حل خاص.

*where $C_1$ and $C_2$ are constants and $y_p(x)$ a particular solution.*

**13.2.5 : Example - مثال**

*Let the equation* — لتكن المعادلة

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0$$

*Let $y = e^{rx}$ so we get:* — ليكن $y = e^{rx}$ ومنه نحصل على:

$$\frac{dy}{dx} = re^{rx} \quad \textit{and} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = r^2 e^{rx}$$

*Substitute these into the equation above:* — بالتعويض في المعادلة السابقة:

$$r^2 e^{rx} + re^{rx} - 6e^{rx} = 0$$

*Simplify:* بعد التبسيط:

$$e^{rx}(r^2+r-6)=0 \Longrightarrow r^2+r-6=0.$$

لقد اختزلنا المعادلة التفاضلية إلى معادلة تربيعية عادية!

*We have reduced the differential equation to an ordinary quadratic equation!*

تُعطى هذه المعادلة التربيعية الاسم الخاص للمعادلة المميزة. يمكننا تحليل هذا العامل إلى:

*This quadratic equation is given the special name of characteristic equation. We can factor this one to:*

$$(r-2)(r+3)=0 \Longrightarrow r_1=2 \quad and \quad r_2=-3$$

*and so we have two solutions:* ومنه لدينا حلين:

$$y_1=e^{2x} \quad and \quad y_2=e^{-3x}$$

لكن هذه ليست الإجابة النهائية لأنه يمكننا الجمع بين مضاعفات مختلفة لهاتين الإجابتين للحصول على حل أكثر عمومية:

*But that's not the final answer because we can combine different multiples of these two answers to get a more general solution:*

$$y=Ay_1+By_2=Ae^{2x}+Be^{-3x}$$

**14.2.5 : Example - مثال**

$$4\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}+y=0$$

*The characteristic equation is:* المعادلة المميزة هي:

$$4r^2+4r+1=0$$

*Then* ومنه

$$(2r+1)^2=0 \Longrightarrow r=-\frac{1}{2}$$

*So the solution of the differential equation is:* ومنه حل المعادلة التفاضلية هو:

$$y = Ae^{(\frac{1}{2})x} + Bxe^{(-\frac{1}{2})x} = (A + Bx)\,e^{(-\frac{1}{2})x}$$

**15.2.5 : Example - مثال**

$$(I): \quad \frac{d^2y}{d^2x} + y = 2$$

*The characteristic equation is:* المعادلة المميزة هي:

$$r^2 + 1 = 0$$

*then* و منه

$$r_1 = i \quad and \quad r_2 = -i.$$

*So the solution is in the form:* ومنه يكون الحل على الشكل

$$\boxed{y = C_1e^{it} + C_2e^{-it} + y_p(t)}$$

حيث $y_p(t)$ الحل الخاص، وهنا نريد تبسيط هذا المقدار (وضعه في صورة أخرى وهي صيغة أويلر).

*Where $y_p(t)$ is the special solution, and here we want to simplify this amount (put it in another form, which is Euler's formula).*

$$\boxed{C_1e^{it} = C_1\cos(t) + iC_1\sin(t) \quad and \quad C_2e^{-it} = C_2\cos(t) - iC_2\sin(t)}$$

بجمع المعادلتين معاً (مع مراعاة الحدود المشابهة) نجد:

*Adding the two equations together (taking into account similar terms), we get:*

$$\boxed{y = C_1e^{it} + C_2e^{-it} = (C_1 + C_2)\cos(t) + i(C_1 - C_2)\sin(t)}$$

و بالتعويض في المعادلة $(I)$ أي أن الحل الخاص مساوي لـ 2 لتصبح المعادلة هي :

*And by substituting in the equation $(I)$, that is, the special solution is equal to 2, so that the equation becomes:*

$$y = A\cos(t) + B\sin(t) + 2,$$

*this is the general solution to the equation.* وهذا هو الحل العام للمعادلة .

### 7.2.5 الحل الخاص Particular solution

**الحل الخاص للمعادلة التفاضلية هو حل فريد من نوعه على شكل $y = f(x)$، والذي يحقق المعادلة التفاضلية. يتم اشتقاق الحل الخاص للمعادلة التفاضلية عن طريق تعيين قيم للثوابت الكيفية للحل العام للمعادلة التفاضلية.**

Particular solution of the differential equation is a unique solution of the form y = f(x), which satisfies the differential equation. The particular solution of the differential equation is derived by assigning values to the arbitrary constants of the general solution of the differential equation.

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = f(x)}$$

**قد تضمن $f(x)$ كلاً من دالة الجيب وجيب التمام. ومع ذلك ، حتى لو تضمن $f(x)$ مصطلح الجيب فقط أو مصطلح جيب التمام فقط، يجب أن يكون كلا المصطلحين موجودين في تخمين الحل الخاص. تعمل طريقة المعاملات المتغيرة أيضا مع كثيرات الحدود والدوال الأسية والجيب وجيب التمام. تم تلخيص بعض النماذج الرئيسية لـ $f(x)$ والتخمينات المرتبطة بـ $y_p(x)$ في هذا الجدول.**

$f(x)$ may include both sine and cosine functions. However, even if $f(x)$ included a sine term only or a cosine term only, both terms must be present in the guess. The method of undetermined coefficients also works with products of polynomials, exponentials, sines, and cosines. Some of the key forms of $f(x)$ and the associated guesses for $y_p(x)$ are summarized in this Table.

| $f(x)$ | Initial guess for $y_p(x)$<br>التخمين الأولي لـ $y_p(x)$ |
|---|---|
| $k$ (a constant)<br>ثابت | $A$ (a constant)<br>ثابت |
| $ax+b$ | $Ax+B$<br>يجب أن يتضمن كلا المصطلحين حتى لو كان $b=0$<br>The guess must include both terms even if $b=0$. |
| $ax^2+bx+c$ | $Ax^2+Bx+C$<br>يجب أن يتضمن المصطلحات الثلاثة حتى لو كان $b$ أو $c$ صفرا<br>The guess must include all three terms even if $b$ or $c$ are zero. |
| كثيرات الحدود من الدرجة $n$<br>Higher-order polynomials | متعدد الحدود من نفس الترتيب مثل $f(x)$<br>Polynomial of the same order as $f(x)$ |
| $ae^{\lambda x}$ | $Ae^{\lambda x}$ |
| $ae^{\alpha x}\cos\beta x + be^{\alpha x}\sin\beta x$ | $Ae^{\alpha x}\cos\beta x + Be^{\alpha x}\sin\beta x$ |
| $(ax^2+bx+c)e^{\lambda x}$ | $(Ax^2+Bx+C)e^{\lambda x}$ |
| $(a_2x^2+a_1x+a_0)\cos\beta x$<br>$+(b_2x^2+b_1x+b_0)\sin\beta x$ | $(A_2x^2+A_1x+A_0)\cos\beta x$<br>$+(B_2x^2+B_1x+B_0)\sin\beta x$ |
| $(a_2x^2+a_1x+a_0)e^{\alpha x}\cos\beta x$<br>$+(b_2x^2+b_1x+b_0)e^{\alpha x}\sin\beta x$ | $(A_2x^2+A_1x+A_0)e^{\alpha x}\cos\beta x$<br>$+(B_2x^2+B_1x+B_0)e^{\alpha x}\sin\beta x$ |

**16.2.5 : Example - مثال**

*Let* لتكن

$$\frac{dy}{dx}=x^2 \Longrightarrow dy=x^2dx$$

بتكامل الطرفين، نحصل على

*Integrating both sides, we get*

$$\int dy=\int x^2dx$$

إذا حللنا هذه المعادلة لإيجاد قيمة $y$ نحصل على

*If we solve this equation to figure out the value of $y$ we get*

$$y = \frac{x^3}{3} + C$$

حيث $C$ ثابت كيفي. في الحل الذي تم الحصول عليه أعلاه ، نرى أن $y$ دالة في $x$. بالتعويض عن هذه القيمة $y$ في المعادلة التفاضلية المحددة ، يصبح كلا طرفي المعادلة التفاضلية متساويين.

*where $C$ is an arbitrary constant. In the above-obtained solution, we see that $y$ is a function of $x$. On substituting this value of $y$ in the given differential equation, both the sides of the differential equation becomes equal.*

## 3.5 سلسلة التمارين رقم 5 *Exercise series N° 5*

**Exercise N°– 1 – تمرين رقم**

حدد حل المعادلة التفاضلية

*Determine the solution to the differential equation*

$$3y' + 4y = 0$$

الذي يحقق الشرط الإبتدائي $y(0) = 2$.

*which satisfies the initial condition $y(0) = 2$.*

**الحـــل**

**هذه المعادلة تكتب على الشكل التالي**

This equation is written in the following form

$$y' = -\frac{4}{3}y$$

**إذن الحل الذي يحقق الشرط الإبتدائي هو**

So the solution that satisfies the initial condition is

$$y(x) = y(0)\, e^{-\frac{4}{3}x}$$

then　　**أي:**

$$y(x) = 2e^{-\frac{4}{3}x}.$$