تمارين السداسي الأول

القسم ا

الجزء الأول : التحليل الرياضي 1 : Part One Mathematical analysis

الفصل الأول

نظريات المجموعات *Sets theories*

1.1 سلسلة التمارين رقم *Exercise series N° 1*

تمرين رقم – 1 – Exercise N°

اكتب بالتفصيل (أي بإعطاء كل عناصر) المجموعات التالية:

Write in detail (i.e., by providing all elements) the following sets:

1) $A = \{integers\ between\ \ 2\pi$ و $\sqrt{2}$ أعداد صحيحة بين$\}$.

2) $B = \left\{x \in \mathbb{Q};\ \exists (n,p) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N},\ x = \frac{p}{n}\ \ and\ \ 1 \leq p \leq 2n \leq 7\right\}$.

الحـــل : Solution

لدينا

$$A = \{2, 3, 4, 5, 6\}.$$

لكتابة B ، نلاحظ أن

$$1/2 \leq n \leq 7/2 \Rightarrow n = 1, 2 \text{ أو } 3.$$

لكل قيمة محتملة لـ n ، نكتب القيم المحتملة لـ p ، ونحصل على:

$$B = \left\{1, 2, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right\}.$$

نلاحظ أنه لم نكتب عدة مرات 1 ، والتي تم الحصول عليها أيضا بـ $2/2$ و $3/3$ ، ولا عدة مرات 2، والتي حصلنا عليها بـ $2/1$ و $4/2$ و $6/3$.

Exercise N°– 2 – تمرين رقم

إذا كان لدينا $C \subset A \cup B$ فهل : لأن $C \subset A$ أو $C \subset B$ ؟

If we have $C \subset A \cup B$ does that mean $C \subset A$ or $C \subset B$?

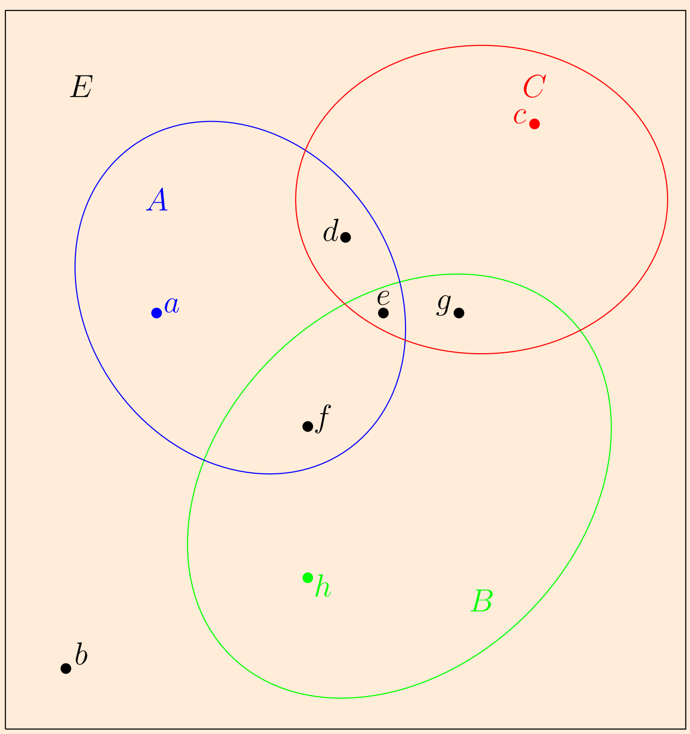
Solution : الحــل

لا! نأخذ مثلا $A = \{1, 2\}$، $B = \{3, 4\}$ و $C = \{2, 3\}$.

Exercise N°– 3 – تمرين رقم

نأخذ في الاعتبار مخطط فين التالي ، الذي يحتوي على ثلاثة مجموعات جزئية A, B, C من المجموعة E و العناصر a, b, c, d, e, f, g, h من E.

We consider the following Venn diagram, which contains three partial sets A, B, and C of the set E, and the elements a, b, c, d, e, f, g, h from E.



حدد ما إذا كانت العبارات التالية صحيحة أم خاطئة:

Determine whether the following statements are true or false:

1) $g \in A \cap \bar{B}$ — **2**) $g \in \bar{A} \cap \bar{B}$. — **3**) $g \in \bar{A} \cup \bar{B}$.
4) $f \in \bar{A}$. — **5**) $e \in \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$. — **6**) $\{h, b\} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$.
7) $\{a, f\} \subset A \cup C$.

Solution : الحـــل

1) **خطأ لأن** $g \in B$ **وبالتالي** $g \notin \overline{B}$.
2) **خطأ لنفس السبب.**
3) **صحيح لأن** $g \in \overline{A}$.
4) **خطأ لأن** $f \in A$.
5) **خطأ لأن** $e \in A$.
6) **يرجع هذا إلى إثبات أن** $h \notin \overline{A} \cap \overline{B}$ **و** $b \in \overline{A} \cap \overline{B}$ **: و هذا خطأ.**
7) **يرجع هذا إلى إثبات أن** $a \in A \cup C$ **و** $f \in A \cup C$**: و هذا صحيح.**

Exercise N°– 4 – تمرين رقم

لتكن B, A و C ثلاث مجموعات حيث $A \cup B = B \cap C$.

Let B, A and C be three sets where $A \cup B = B \cap C$.

أثبت أن $A \subset B \subset C$.

Prove that $A \subset B \subset C$.

Solution : الحـــل

ليكن $x \in A$. **ومنه** $x \in A \cup B$ **، وبالتالي** $x \in B \cap C$، **أي أن،** $x \in B$ **، وبالتالي** $A \subset B$.
الآن نأخذ $x \in B$. **ومنه** $x \in A \cup B$ **، وبالتالي** $x \in B \cap C$، **أي أن** **،** $x \in C$ **، وبالتالي** $B \subset C$.

Exercise N°– 5 – تمرين رقم

لتكن B, A و C ثلاثة مجموعات جزئية من المجموعة E. من أجل $X \subset E$ ، نرمز بالرمز X^c إلى متممة X في E.

Let B, A and C be three subsets of the set E. For $X \subset E$, we denote by X^c the complement of X in E.

Prove the following Morgan's laws: أثبت قوانين مورغان التالية:

1. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ **2.** $(A^c)^c = A$

3. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ **4.** $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Solution : الحـــل

في كل مرة سنبرهن بالإحتواء المزدوج.

1) **ليكن** $x \in (A \cap B) \cup C$، **ومنه** $x \in A$ **و** $x \in B$ **أو** $x \in C$. **إذا كان** $x \in A$ **و** $x \in B$ ، **فإن** $x \in A \cup C$ **و** $x \in B \cup C$ ، **ويتم إثبات الإحتواء. بخلاف ذلك ، يكون** $x \in C$ **فقط ، وفي هذه الحالة لدينا أيضا** $x \in A \cup C$ **و** $x \in B \cup C$.

بالمقابل ، إذا كان $x \in A \cup C$ **و** $x \in B \cup C$ ، **فإننا نميز بين حالتين: إذا كان** $x \in C$ ، **ومنه** $x \in (A \cap B)$ **أو** $x \in C$ **وبالتالي** $x \in (A \cap B) \cup C$. **خلاف ذلك** ، $x \notin C$. **ولكن ، بما أن** $x \in A \cup C$، **يصبح لدينا** $x \in A$. **وبالمثل، بما أن** $x \in B \cup C$، **فإن** $x \in B$. **هذا يثبت أن** $x \in A \cap B$ **وبالتالي** $x \in (A \cap B) \cup C$.

2) **ليكن** $x \in (A^c)^c$. **ومنه** $x \notin A^c$ ، **وبالتالي** $x \in A$. **بالمقابل ، إذا كان** $x \in A$ ، **فإن** $x \notin A^c$ **وبالتالي** $x \in (A^c)^c$.

3) **ليكن** $x \in (A \cap B)^c$. **ثم** $x \notin A \cap B$. **إذن لدينا** $x \notin A$ **أو** $x \notin B$ ، **أي أن** $x \in A^c$ **أو** $x \in B^c$. **نستنتج أن** $x \in A^c \cup B^c$. **بالمقابل ، ليكن** $x \in A^c \cup B^c$. **إذن** $x \in A^c$ **أو** $x \in B^c$ ، **أي أن** $x \notin A$ ، **أو** $x \notin B$. **على وجه الخصوص ،** $x \notin A \cap B$ **وبالتالي** $x \in (A \cap B)^c$.

4) **يمكننا أيضاًا تقديم المنطق السابق في نموذج التكافؤ**

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)^c &\iff x \notin A \cup B \\ &\iff x \notin A \text{ و } x \notin B \\ &\iff x \in A^c \text{ و } x \in B^c \\ &\iff x \in A^c \cap B^c. \end{aligned}$$

Exercise N°– 6 – تمرين رقم

لتكن E مجموعة، A ، B و C ثلاثة عناصر من $\mathscr{P}(E)$. أثبت أن:

Let E be a set, A , B and C three elements of $\mathscr{P}(E)$. Prove that:

1) إذا كان $A \cap B = A \cup B$ ، فإن $A = B$.
If $A \cap B = A \cup B$ *, then* $A = B$ *.*

2) إذا كان $A \cap B = A \cap C$ و $A \cup B = A \cup C$ ، فإن $B = C$. هل يكفي أحد الشرطين؟
If $A \cap B = A \cap C$ *and* $A \cup B = A \cup C$ *, then* $B = C$ *. Is one of the two conditions sufficient?*

Solution : الحـــل

1) من خلال تناظر القضية في A و B، يكفي إثبات أن $A \subset B$.
ليكن $x \in A$ ونفرض أن $x \notin B$. ومنه فإن $x \in A \cup B$ ولكن $x \notin A \cap B$ وبالتالي فإن المجموعتين $A \cap B$ و $A \cup B$ مختلفتان ، وهذا تناقض. لذلك فإن $x \in B$.

2) من خلال تناظر القضية في B و C ، يكفي إثبات أن $B \subset C$.
ليكن $x \in B$. نميز هنا حالتين:

A) إما $x \in A$، في هذه الحالة ، $x \in A \cap B = A \cap C$ ، وبالتالي $x \in C$.

B) أو $x \notin A$، في هذه الحالة ، $x \in A \cup B = A \cup C$ وبالتالي $x \in A$ أو $x \in C$. نظراً لأننا في الحالة $x \notin A$ ، فإننا نستنتج أن $x \in C$.

في جميع الحالات ، أثبتنا $x \in C$ ، وبالتالي $B \subset C$. شرط واحد غير كافي.

إذا افترضنا فقط أن $A \cup B \subset A \cup C$ ، علينا فقط أن نأخذ المثال التالي لكي نبرهن ضرورة الشرطين معا.
ليكن $A = \{1, 2\}$ ، $B = \{1\}$ و $C = \{2\}$.
لدينا $A \cup B \subset A \cup C$ ، لكن ليس لدينا $B \subset C$.

إذا افترضنا فقط أن $A \cap B \subset A \cap C$ ، علينا أن نأخذ فقط كمثال $A = C = \{1\}$ و $B = \{1, 2\}$.

Exercise N°– 7 – تمرين رقم

اوجد مجموعة أجزاء المجموعة
Find the set of parts of the set

$$E = \{a, b, c, d\}.$$

Solution : الحـــل

المجموعة $P(E)$ لأجزاء مجموعة $E = a, b, c, d$ تحتوي على جميع المجوعات الجزئية الممكنة للمجموعة E، بما في ذلك المجموعة الخالية والمجموعة نفسها. إليك جميع المجموعات الجزئية:

The set $P(E)$ of parts of the set $E = \{a, b, c, d\}$ includes all possible subsets of E, including the empty set and the set itself. Here are all the subsets:

$$\begin{aligned} P(E) = \{&\phi, \\ &\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \\ &\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \\ &\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \\ &E\} \end{aligned}$$

Exercise N°– 8 – تمرين رقم

لتكن E و F مجموعتين و لتكن A و C مجموعتين جزئيتين من E و B، D مجموعتين جزئيتين من F .

Let E and F be two sets, and let A and C be two subsets of E and B , D be two subsets of F .

Prove that أثبت أن

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$$

Solution : الحــل

سنبرهن الإحتواء المزدوج.

لتكن $(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D)$. **ومنه** $(x, y) \in A \times B$ **وبالتالي** $x \in A$ ، $y \in B$.

لدينا أيضا $(x, y) \in (C \times D)$، **وبالتالي** $x \in C$ **و** $y \in D$. **لذا** ، $x \in A \cap C$ **و** $y \in B \cap D$.

هذا يثبت أن $(x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$.

بالمقابل ، لتكن $(x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$ **يعني أن** $x \in A \cap C$ **وبالتالي** $x \in A$ **و** $x \in C$.

وبالمثل، $y \in B \cap D$ ، **لذا** $y \in B$ **و** $y \in D$. **إذن** ، $(x, y) \in A \times B$ **و** $(x, y) \in C \times D$.

نستنتج أن $(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D)$.

Exercise N°– 9 – تمرين رقم

لتكن E مجموعة و A و B مجموعتين جزئيتين من E.

Let E be a set, and A and B be two subsets of E.

أثبت أن $A\Delta B = B$ (الفرق التناظري) إذا وفقط إذا كانت $A = \varnothing$.

Prove that $A\Delta B = B$ (symmetric difference) if and only if $A = \varnothing$.

Solution : الحـــل

تذكر أولا أن الفرق التناظري يمكن كتابته ايضا على الشكل

$$\boxed{A\Delta B = (A\cap \bar{B})\cup(\bar{A}\cap B)}$$

حيث $\bar{A}$ تمثل متمم المجموعة A في E.

هناك إحتواء سهل:

إذا كان $A=\phi$ ، فعند تعريف الفرق التناظري، لدينا $A\cap B = B$ و لأن $A=\phi$ و $\bar{A}\cap B = B$.

بالمقابل ، إذا كان $A\cap B = B$ ، يجب أن نثبت أن $A=\phi$.

سنقسم الإثبات إلى قسمين:

أولا: نثبت أن $A\cap B=\phi$.

ليكن $x\in B$، و على وجه الخصوص $x\in A\cap B$ ، و يعني حتما أن $x\in A\cap\bar{B}$ أو $x\in\bar{A}\cap B$.

الاحتمال الأول مستحيل (لأن $x\in B$) وبالتالي لدينا الإحتمال الثاني هو الصحيح $x\in\bar{A}\cap B$.

وبالتالي ، فإن كل عنصر من عناصر من المجموعة B موجود أيضا في $\bar{A}$ ، وبالتالي $A\cap B=\phi$.

سنثبت أيضا أن $A\cap\bar{B}=\phi$.

في الواقع ، لنفرض أنه يمكننا إيجاد عنصر في $A\cap\bar{B}$. سيكون هذا العنصر أيضا في $A\cap B = B$ ، وهو أمر مستحيل لأنه سيكون في الوقت نفسه في B و $\bar{B}$.

في الأخير، المواجهة بين الخاصيتين السابقتين يعني أن $A=\phi$.

Exercise N°– 10 – تمرين رقم

حدد ما إذا كانت العلاقات التالية انعكاسية ، تناظرية ، ضد تناظرية أو متعدية:

Determine whether the following relations are reflexive, symmetric, anti-symmetric, or transitive:

$$E=\mathbb{Z} \text{ and } x\mathscr{R}y \iff x=-y \quad (1)$$

$$E = \mathbb{R} \text{ and } x\mathscr{R}y \iff \cos^2 x + \sin^2 y = 1 \quad (2)$$

$$E = \mathbb{N} \text{ and } x\mathscr{R}y \iff \exists p, q \geq 1,\ y = px^q \quad (3)$$

where p and q are natural numbers. — حيث p و q أعداد طبيعية.

Solution : الحــل

(1) العلاقة ليست انعكاسية ، لأن 1 ليس لها علاقة بنفسها. في الواقع ، $-1 \neq 1$.

العلاقة تناظرية ، لأن $x = -y \iff y = -x$.

العلاقة ليست ضد تناظرية ، لأن $1\mathscr{R}(-1)$ و $(-1)\mathscr{R}1$ ، بينما $1 \neq -1$.

العلاقة ليست متعدية ، وإلا فإنها ستكون متناظرة

ومنه هذه العلاقة ليست علاقة تكافؤ ، ولا علاقة ترتيب.

Exercise N°– 11 – تمرين رقم

In $\mathbb{R}^2$ we define the relationship $\mathscr{R}$ as follows: — نعرف في $\mathbb{R}^2$ العلاقة $\mathscr{R}$ كما يلي:

$$(x, y)\mathscr{R}(x', y') \iff x = x'.$$

Prove that $\mathscr{R}$ is an equivalence relation. — (1) أثبت أن $\mathscr{R}$ علاقة تكافؤ.

(2) أوجد صنف تكافؤ العنصر $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Find the equivalence class of the element $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Solution : الحــل

العلاقة $\mathscr{R}$ هي علاقة تكافؤ لأنها:

(1) إنعكاسية لأن $x = x$ مهما يكن x ومنه $(x, y)\mathscr{R}(x, y)$

(2) تناظرية: إذا كان $(x, y)R(x', y')$ فإن $x = x'$ الذي يمكن كتابته أيضا $x = x'$ الذي يكافئ $(x', y')\mathscr{R}(x, y)$.

(3) متعدية: إذا كان $(x, y)R(x', y')$ و $(x', y')R(x'', y'')$ فإن $x = x'$ من جهة و $x' = x''$ من جهة أخرى، يعني $x = x''$ الذي ينتج لنا $(x, y)R(x'', y'')$.

نبحث الآن عن صنف تكافؤ العنصر (x_0, y_0) أي تحديد الثنائيات (x, y) التي تحقق $(x, y)\mathscr{R}(x_0, y_0)$.

لدينا

$$(x, y)\mathscr{R}(x_0, y_0) \Longrightarrow x = x_0.$$

ونستطيع أن نقول أيضا أن x يجب أن يساوي x_0 أما y يكون أي قيمة.
نستنتج أن صنف تكافؤ العنصر (x_0, y_0) هو المجموعة

$$\{(x_0, y); y \in \mathbb{R}\}.$$

Exercise N°– 12 – تمرين رقم

نعرف على المجموعة $\mathbb{R}$ العلاقة التالية — *We define the following relation on the set $\mathbb{R}$*

$$x\mathscr{R}y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 = x - y.$$

(1) أثبت أن $\mathscr{R}$ علاقة تكافؤ. — *Prove that $\mathscr{R}$ is an equivalence relation.*

(2) أوجد صنف تكافؤ العنصر x من $\mathbb{R}$. — *Find the equivalence class of the element x of $\mathbb{R}$.*

(3) كم يوجد من عنصر في هذه الفئة؟ — *How many elements are there in this category?*

Solution : الحل

(1) نلاحظ أن

$$x\mathscr{R}y \iff x^2 - x = y^2 - y \iff f(x) = f(y)$$

حيث $f : x \mapsto x^2 - x$ ، من السهل بعد ذلك التحقق من خلال هذا التطبيق أن $\mathscr{R}$ هي علاقة تكافؤ ، أي أنها انعكاسية وتناظرية ومتعدية.

(2) ليكن $x \in \mathbb{R}$. نبحث عن العناصر y من $\mathbb{R}$ حيث $x\mathscr{R}y$.

لذلك يجب علينا حل المعادلة (في y)

$$x^2 - y^2 = x - y.$$

باستعمال

$$(x - y)(x + y) - (x - y) = 0 \iff (x - y)(x + y - 1) = 0.$$

(3) حلول المعادلة هي $y = x$ و $y = 1 - x$. وبالتالي فإن صنف تكافؤ x هو المجموعة $\{x, 1-x\}$. وهي مكونة من عنصرين.
إذا كان $x = 1 - x \Longrightarrow x = 1/2$. في هذه الحالة ، صنف نكافؤ العنصر x هو المجموعة $\{1/2\}$.

Let's prove each of these properties:

(a) Reflexivity: For any $x \in \mathbb{R}$, we have:

$$x^2 - x = x - x \quad \text{(Subtracting } x \text{ from both sides)} \quad x^2 - x = 0.$$

This shows that $x\mathscr{R}x$ since $x^2 - x = 0$.

(b) Symmetry: Let $x, y \in \mathbb{R}$ such that $x\mathscr{R}y$. This means:

$$x^2 - y^2 = x - y.$$

We can rearrange this equation by adding y to both sides:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + y &= x - y + y \\ x^2 - y^2 + y &= x. \end{aligned}$$

Now, we have shown that $x\mathscr{R}y$ implies $x = x^2 - y^2 + y$. Similarly, if we start with $y\mathscr{R}x$, we will arrive at the same conclusion: $y = x^2 - y^2 + y$. Therefore, $\mathscr{R}$ is symmetric.

(c) Transitivity: Let $x, y, z \in \mathbb{R}$ such that $x\mathscr{R}y$ and $y\mathscr{R}z$. This means:

$$x^2 - y^2 = x - y \quad \text{and} \quad y^2 - z^2 = y - z.$$

We can add these two equations together:

$$(x^2 - y^2) + (y^2 - z^2) = (x - y) + (y - z).$$

Now, we can simplify each side of the equation:

$$x^2 - y^2 + y^2 - z^2 = x - y + y - z \; x^2 - z^2 \qquad = x - z.$$

This shows that $x\mathscr{R}z$, and therefore, $\mathscr{R}$ is transitive.

Since $\mathscr{R}$ satisfies all three properties (reflexivity, symmetry, and transitivity), it is indeed an equivalence relation.

(2) To find the equivalence class of the element $x \in \mathbb{R}$, we need to determine all elements $y \in \mathbb{R}$ such that $x\mathscr{R}y$.

From the definition of $\mathscr{R}$, we have:

$$x\mathscr{R}y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 = x - y.$$

Let's simplify this equation:

$$x^2 - y^2 = x - y \ (x - y)(x + y) \qquad = x - y.$$

Now, we have two cases:

Case 1: $x - y = 0$. This implies $x = y$.

Case 2: $x - y \neq 0$. In this case, we can divide both sides by $(x - y)$:

$$x + y = 1.$$

Now, we have two equations:

(i) $x = y$ from Case 1.

(ii) $x + y = 1$ from Case 2.

Therefore, the equivalence class of x consists of all real numbers y such that $y = x$ or $y + x = 1$.

(3) To determine how many elements are in this equivalence class, let's analyze the possibilities:

(a) If $y = x$, then there is only one element in the equivalence class, which is $x = 1/2$
(b) If $y \neq x$, then there is only two elements in the equivalence class, which is $\{x, 1 - x\}$

Exercise N°– 13 – تمرين رقم

1) لتكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ حيث $x \mapsto x^2$ و لتكن $A = [-1, 4]$. أوجد:

Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ where $x \mapsto x^2$ and let $A = [-1, 4]$. Find:

A) الصورة المباشرة للمجموعة A بواسطة التطبيق f

The direct image of the set A by application f.

B) الصورة العكسية للمجموعة A بواسطة التطبيق f.

The inverse image of the set A by the application f.

2) لتكن الدالة $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Let the function be $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

A) ماهي الصورة المباشرة بواسطة $\sin$ للمجموعة $\mathbb{R}$؟ و $[0, 2\pi]$؟ و $[0, \pi/2]$؟

What is the direct image by $\sin$ *of the set* $\mathbb{R}$*? And* $[0, 2\pi]$*? And* $[0, \pi/2]$*?*

B) ماهي الصورة العكسية بواسطة $\sin$ للمجموعة $[0, 1]$؟ و $[3, 4]$؟ و $[1, 2]$؟

What is the inverse image by $\sin$ *of the set* $[0, 1]$*? And* $[3, 4]$*? And* $[1, 2]$*?*

Solution : الحـــل

1) A) **نبحث عن جميع القيم المأخوذة بواسطة** x^2 **عندما** $x \in [-1, 4]$ **فبين** -1 **و** 0 **، يتم أخذ جميع القيم من** 0 **إلى** 1 **، وبين** 0 **و** 4 **، جميع القيم بين** 0 **و** 16 **لذلك ،** $f(A) = [0, 16]$.

We are looking for all the values taken by x^2 when x$\in [-1, 4]$. Between -1 and 0, all values are taken from 0 to -1, and between 0 and 4, all values are taken from 0 to 16. Therefore, $f(A) = [0, 16]$.

B) **لدينا** $x \in f^{-1}(A)$ **إذا وفقط إذا كانت** $x^2 \in [-1, 4]$ **بالطبع تم استبعاد القيم السالبة ، ولكي تكون** x^2 **في** $[0, 4]$ **، فمن الضروري والكافي أن** $x \in [-2, 2]$ **إذن لدينا** $f^{-1}(A) = [-2, 2]$.

We have $x \in f-1(A)$ if and only if $x^2 \in [-1, 4]$, of course, excluding negative values. To have x^2 in $[0, 4]$, it is necessary and sufficient for x to be in $[-2, 2]$. So, we have $f^{-1}(A) = [-2, 2]$.

2) **الصورة المباشرة لـ** $\mathbb{R}$ **اعتبارا من** $[0, 2\pi]$ **هي**$[-1, 1]$.

الصورة المباشرة لـ $[0, \pi/2]$**هي** $[0, 1]$.

لتحديد الصورة المقلوبة لـ $[0,1]$، نبحث عن الأعداد الحقيقية x مثل $\sin(x)\in[0,1]$. و منه، القيم الحقيقية التي يمكن كتابتها هي $u+k2\pi$ مع $u\in[0,\pi]$ و $k\in\mathbb{Z}$. بإمكاننا كتابة المجموعة

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[2k\pi,(2k+1)\pi].$$

لا يوجد عدد حقيقي جبه في $[3,4]$ وبالتالي فإن الصورة العكسية لـ $[3,4]$ هي المجموعة الفارغة.

أخيرا، الصورة العكسية لـ $[1,2]$ مطابقة للصورة العكسية لـ $\{1\}$ ، وهي تساوي $\{\pi/2+2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\}$.

Exercise N°– 14 – تمرين رقم

لتكن f و g الدوال المعرفة من $\mathbb{N}$ نحو $\mathbb{N}$ المعرفة كما يلي $f(x)=2x$ و

Let f and g be the functions defined from $\mathbb{N}$ towards $\mathbb{N}$ defined as follows $f(x)=2x$ and

$$g(x)=\begin{cases}\frac{x}{2} & \textit{if } x \textit{ an even number}\\ 0 & \textit{if } x \textit{ an odd number}\end{cases}$$

أوجد $g\circ f$ و $f\circ g$.

Find $g\circ f$ and $f\circ g$.

هل الدوال f و g متباينة؟ غامرة؟ تقابلية؟

Are the functions f and g Injectionts? surjections? bijections?

Solution : الحــل

1) **لنجد أولاً التركيب $g\circ f$ و $f\circ g$:**

Let's first find the compositions $g\circ f$ and $f\circ g$:

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x)=x.$$

من جهة أخرى:

On the other hand:

$$f\circ g(x)=\begin{cases}f(x/2)=x & \text{if } x \text{ an even number}\\ f(0)=0 & \text{if } x \text{ an odd number}\end{cases}$$

بصفة خاصة، لدينا:

In particular, we have:

$$f\circ g\neq g\circ f$$

because لأن

$$f \circ g(1) = 0 \neq g \circ f(1) = 1.$$

2) الآن دعونا نحلل خصائص الدوال:

Now, let's analyze the properties of the functions:

For the function : من أجل الدالة:

$$f(x) = 2x$$

التباين: هذه الدالة متباينة لأنه من أجل كل عددين طبيعيين مخلفين x_1 **و**x_2**، يكون** $f(x_1) = 2x_1$ **و** $f(x_2) = 2x_2$ **مختلفين.**

Injection: Yes, it's injective because for any two different natural numbers x_1 and x_2, $f(x_1) = 2x_1$ and $f(x_2) = 2x_2$ are different.

الغمور: إنها ليست غامرة لأن الأعداد الفردية ليس لها صور.

Surjection: No, it's not surjective because the odd numbers don't have images.

التقابل: نظرا لأنها ليست غامرة فهي ليست تقابل.

Bijection: No, it's not bijection because it's not surjective.

For the function : من أجل الدالة:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{if } x \text{ an even number} \\ 0 & \text{if } x \text{ an odd number} \end{cases}$$

التباين: هذه الدالة ليست متباينة لأن $g(3) = g(7) = 0$

Injection: No, it's not injective because it maps different even numbers to the same value (e.g., $g(3) = g(7) = 1$).

الغمور: هذه الدالة ليست غامرة لأنه يوجد على الأقل عنصر $(y = 1)$ **في المجموعة** $\mathbb{N}$ **ليس لها سابقة في المجموعة** $\mathbb{N}$ **وهذا ما يعني أن** g **ليس غامرا.**

Surjection: No, it's not surjective because there exists at least one element $(y = 1)$ in the domain $\mathbb{N}$ which is not the image of an element in the domain $\mathbb{N}$ under g, which means that g is not surjective.

التقابل: نظرا لأنها ليست غامرة و ليست متباينة فهي ليست تقابل.

Bijection: No, it's not a bijection because it's neither injective nor surjective.

من خلال ما سبق كلا الدالتين f و g ليسا تقابل.

From the above, both functions f and g are not bijective.

Exercise N°– 15 – تمرين رقم

هل الدوال التالية متباينة؟ غامرة؟ تقابلية؟

Are the following functions Injectionts? surjections? bijections?

$$f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto 2n,\ \ f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto -n$$

$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2,\ \ f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2$$

$$f_5 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^2.$$

Solution : الحـــل

لنحلل كل دالة على حدى:

Let's analyze each of the functions:

1) الدالة:

The function

$$f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto 2n,$$

التباين: هذه الدالة متباينة لأنه لكل زوج من الأعداد الصحيحة (n, m) إذا كان $2n = 2m$ فإن $n = m$

Injection: This function is injective because for every distinct pair of integers (n, m) if $2n = 2m$, then $n = m$.

$$\forall n, m \in \mathbb{Z} : f_1(n) = f_1(m) \Longrightarrow 2n = 2m \Longrightarrow n = m$$

الغمور: هذه الدالة ليست غامرة لأنها لا تغطي جميع الأعداد الصحيحة في المجال. على سبيل المثال، لا يوجد عدد صحيح n حيث $2n = 1$.

Surjection: This function is not surjective because it does not cover all integers in the domain. For example, there is no integer n such that $2n = 1$.

التقابل: نظرا لأنها ليست غامرة فهي ليست تقابل.

Bijection: Since it's not surjective, it's not a bijection.

The function — 2) **الدالة:**

$$f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto -n,$$

التباين: هذه الدالة متباينة لأنه لكل زوج من الأعداد الصحيحة (n, m) **إذا كان** $-n = -m$ **فإن** $n = m$

Injection: This function is injective because for every distinct pair of integers (n, m) , if $-n = -m$, then $n = m$.

$$\forall n, m \in \mathbb{Z} : f_2(n) = f_2(m) \Longrightarrow -n = -m \Longrightarrow n = m$$

الغمور: هذه الدالة غامرة لأنها تغطي جميع الأعداد الصحيحة في المجموعة $\mathbb{Z}$. **من أجل كل عدد صحيح** m **في** $\mathbb{Z}$، **يوجد عدد صحيح** n **حيث** $-n = -m$.

Surjection : This function is surjective because it covers all integers in the domain $\mathbb{Z}$. For any integer m in $\mathbb{Z}$, there exists an integer n such that $-n = -m$.

التقابل: نظرا لأنها متباينة و غامرة فهي تقابل.

Bijection: Since it's both injective and surjective, it is a bijection.

The function — 3) **الدالة:**

$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2,$$

التباين: هذه الدالة ليست متباينة لأنه و على سبيل المثال، $f_3(-2) = 4$ **و** $f_3(2) = 4$، **لذا فهي ليست متباينة.**

Injection : This function is not injective because for example, $f_3(-2) = 4$ and $f_3(2) = 4$, so it's not injective.

الغمور:هذه الدالة غامرة لأنها تغطي كافة الأعداد الحقيقية في المجموعة $\mathbb{R}$. من أجل كل عدد حقيقي y، يوجد عدد حقيقي x حيث $x^2 = y$.

Surjection : This function is surjective because it covers all real numbers in the domain $\mathbb{R}$. For any real number y, there exists a real number x such that $x^2 = y$.

التقابل: نظرا لأنها ليست متباينة فهي ليست تقابل.

Bijection: Since it's not injective, it's not a bijection.

4) **الدالة:**   The function

$$f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2,$$

التباين: هذه الدالةة ليست متباينة لنفس السبب مثل f_3. ليكن x_1 و x_2 أعداد حقيقية حيث $x_1 = -x_2$. لهما نفس الصورة الموجبة لهذا هي ليست متباينة.

Injection : This function is not injective for the same reason as f_3. It maps distinct real numbers x_1 and x_2 to the same positive value if $x_1 = -x_2$. So, it's not injective.

الغمور: هذه الدالة غامرة لأنها تغطي كافة الأعداد الحقيقية في المجموعة $\mathbb{R}$. من أجل كل عدد حقيقي y، يوجد عدد حقيقي x حيث $x^2 = y$.

Surjection: This function is surjective because it covers all positive real numbers in the domain $\mathbb{R}_+$. For any positive real number y, there exists a real number x such that $x^2 = y$.

التقابل: نظرا لأنها ليست متباينة فهي ليست تقابل.

Bijection: Since it's not injective, it's not a bijection.

5) **الدالة:**   The function

$$f_4 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^2,$$

Injection: This function is not injective because it maps distinct complex numbers z_1 and z_2 to the same value if $z_1 = z_2$. For example, $f_5(-2i) = -4$ and $f_5(2i) = -4$, so it's not injective.

الغمور: هذه الدالة ليست غامرة لأنها لا تغطي كافة الأعداد في المجموعة $\mathbb{C}$. على سبيل المثال، لا يمكن إيجاد سوابق للأعداد الحقيقية السالبة.

Surjection: This function is not surjective because it doesn't cover all complex numbers in the domain $\mathbb{C}$. For example, it cannot map to negative real numbers.

التقابل: نظرا لأنها ليست متباينة وليست غامرة فهي ليست تقابل.

Bijection: Since it's neither injective nor surjective, it's not a bijection.

Exercise N°– 16 – تمرين رقم

بين أن 5 يقسم $n^5 - n$.

Show that 5 divides $n^5 - n$.

Solution : الحــل

لنثبت أن العدد 5 يقسم $n^5 - n$ من أجل كل الأعداد الطبيعية n باستخدام الإستدلال بالتراجع، سنتبع الخطوات التالية :

To prove that 5 divides $n^5 - n$ for all natural numbers n using mathematical induction, we will follow these steps:

الحالة الأساسية: أولاً، سنتحقق مما إذا كان البيان صحيحاً للحالة الأساسية، والتي عادة ما تكون $n = 1$. بالنسبة لـ $n = 1$، لدينا:

Base Case: First, we'll check if the statement holds for the base case, which is typically $n = 1$. For $n = 1$, we have:

$$1^5 - 1 = 0.$$

نظرا لأن الصفر قابل للقسمة على أي عدد صحيح، بما في ذلك 5، فإن الحالة الأساسية صحيحة.

Since 0 is divisible by any integer, including 5, the base case is true.

الفرضية الاستقرائية: نفترض أن الخاصية التراجعية صحيحة من أجل العدد الطبيعي k، أي نفترض أن 5 تقسم k^5-k.

Inductive Hypothesis: We assume that the statement is true for some positive integer k, i.e., we assume that 5 divides $k^5 - k$.

الخطوة الاستقرائية: علينا أن نثبت أن الخاصية صحيحة لـ $k+1$ استناداً إلى الافتراض الذي قمنا به في الفرضية الاستقرائية.

Inductive Step: We need to prove that the statement is true for $k+1$ based on the assumption made in the inductive hypothesis.

بدءا من الافتراض، لدينا $k^5-k=5m$ حيث m عدد صحيح.

Starting with the assumption, we have: $k^5 - k = 5m$, where m is an integer.

Now, we'll consider: **الآن، سننظر إلى :**

$$(k+1)^5 - (k+1) :$$

$$\begin{aligned}
(k+1)^5 - (k+1) &= k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 - (k+1) \\
&= k^5 - k + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k \\
&= 5m + 5\left(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k\right) \\
&= 5 + \left(m + k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k\right) \\
&= 5m', m' \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

إذاً، قد أثبتنا أن $(k+1)^5-(k+1)$ قابل للقسمة على 5.

So, we've shown that $(k+1)^5 - (k+1)$ is divisible by 5.

بموجب مبدأ الاستدلال الرياضي، قد ثبتنا أنه بالنسبة لجميع الأعداد الطبيعية n، ٥ يقسم n^5-n.

By the principle of mathematical induction, we have established that for all natural numbers n, 5 divides $n^5 - n$.

الفصل الثاني

الدوال الحقيقية *Real functions*

1.2 سلسلة التمارين رقم *Exercise series N° 2*

تمرين رقم – 1 – Exercise N°

أحسب النهايات التالية إذا كانت موجودة.

Calculate the following limits if they exist.

1. $\lim_{x\to 5^+} \frac{x^2-11x+28}{x^2-25}$
2. $\lim_{x\to 5^-} \frac{x^2-11x+28}{x^2-25}$
3. $\lim_{x\to 5^+} \frac{x^2-9x+20}{x^2-25}$
4. $\lim_{x\to 5^-} \frac{x^2-9x+20}{x^2-25}$

الحــل : Solution

1) لدينا $\lim_{x\to 5} x^2-11x+28=-2$ و $lim_{x\to 5}x^2-25=0$. علينا الانتباه إلى إشارة المقام. من أجل $x>5$ لدينا $x^2>25$ ومنه $\lim_{x\to 5^+} x^2-25=0^+$. نستنتج :

$$\lim_{x\to 5^+} \frac{x^2-11x+28}{x^2-25}=-\infty.$$

2) نسير بنفس الطريقة، لكن نلاحظ أن: $\lim_{x\to 5^-} x^2-25=0^-$. في هذه الحالة لدينا:

$$\lim_{x\to 5^-} \frac{x^2-11x+28}{x^2-25}=+\infty.$$

3) لدينا $\lim_{x\to 5} x^2-9x+20=0$، وبالتالي هي حالة عدم تعيين $0/0$. سنزيلها عن طريق تحليل البسط والمقام إلى الجذر المشترك. وبالتالي ينتج لنا:

$$x^2-25=(x-5)(x+5)$$

من ناحية أخرى

$$x^2-9x+20=(x-5)(x-4).$$

نستطيع أن نكتب:

$$\frac{x^2-9x+16}{x^2-25}=\frac{(x-5)(x-4)}{(x-5)(x+5)}=\frac{x-4}{x+5}.$$

هنا لاتوجد خالة عدم التعيين، وعليه:

$$\lim_{x\to 5} x-4=1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 5} x+5=10.$$

﴿4﴾ نستنتج أن:

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-9x+16}{x^2-25}=\frac{1}{10}.$$

ولسنا بحاجة لدراسة النهاية يمينا و يسارا.

Exercise N°– 2 – تمرين رقم

أحسب النهايات التالية :

Calculate the following limits.

1. $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}$ **2.** $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}-x$

Solution : الحــل

في كل حالة ، سنضرب في المرافق:

1)

$$\begin{aligned}\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}&=\frac{(\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4})(\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4})}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}\\&=\frac{(x+4)-(x-4)}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}\\&=\frac{8}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}.\end{aligned}$$

يؤول المقام إلى $+\infty$ (ليست حالة عدم تعيين) ومنه ينتج لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}=0.$$

(2

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-1}-x &= \frac{(\sqrt{x^2-1}-x)(\sqrt{x^2-1}+x)}{\sqrt{x^2-1}+x}\\ &= \frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}\\ &= \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}.\end{aligned}$$

يؤول المقام إلى $+\infty$ ومنه ينتج لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}-x=0.$$

Exercise N°− 3 − تمرين رقم

Calculate the following limits. أحسب النهايات التالية :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}-e^{x}$ **2.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}+1}{x+3}$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{xe^{x}+2e^{x}-5}{e^{x}-3}$ **4.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+x\sin x}{x^2+x\cos x}$.

Solution : الحـــل

1) نخرج e^{2x} كعامل مشترك. نجد :

$$e^{2x}-e^{x}=e^{2x}\left(1-\frac{e^{x}}{e^{2x}}\right)=e^{2x}(1-e^{-x}).$$

في حين $\lim_{x\to+\infty} e^{2x}=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} 1-e^{-x}=1$ ومنه:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{2x}-e^{x}=+\infty.$$

2) نخرج e^{2x} كعامل مشترك في البسط و x في المقام نجد:

$$\frac{e^{2x}+1}{x+3}=\frac{e^{2x}}{x}\cdot\frac{1+e^{-2x}}{1+\frac{3}{x}}.$$

في حين لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} 1+e^{-2x}=1,\ \lim_{x\to+\infty} 1+\frac{3}{x}=1\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{1+e^{-2x}}{1+\frac{3}{x}}=1.$$

من ناحية أخرى، من خلال التزايد، لدينا

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x}=+\infty.$$

أخيرا، نستنتج بحاصل ضرب النهايات هو:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}+1}{x+3}=+\infty.$$

3) نخرج xe^x عامل مشترك من البسط و e^x من المقام نجد :

$$\frac{xe^x+2e^x-5}{e^x-3}=\frac{xe^x}{e^x}\cdot\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{5}{xe^x}}{1-3e^{-x}}=x\cdot\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{5}{xe^x}}{1-3e^{-x}}.$$

ولأن $\lim_{x\to+\infty}xe^x=+\infty$ (ليست حالة عدم تعيين)، لأن $\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0$ يعطينا:

$$\lim_{x\to+\infty}1+\frac{2}{x}-\frac{5}{xe^x}=1,\ \lim_{x\to+\infty}1-3e^{-x}=1\Longrightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{5}{xe^x}}{1-3e^{-x}}=1.$$

نستنتج بحاصل ضرب النهايتين أن :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x+2e^x-5}{e^x-3}=+\infty.$$

4) نخرج x^2 كعامل مشترك من البسط والمقام نجد:

$$\frac{x^2+x\sin x}{x^2+x\cos x}=\frac{x^2}{x^2}\cdot\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\cos x}{x}}=\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\cos x}{x}}.$$

لأن $-1\leq\sin x\leq 1$ لدينا من أجل كل $x>0$:

$$\frac{-1}{x}\leq\frac{\sin x}{x}\leq\frac{1}{x}$$

ومنه حسب النظرية $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$. نبرهن بنفس الطريقة أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x}=0$. نجد :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x\sin x}{x^2+x\cos x}=\frac{1}{1}=1.$$

Exercise N°– 4 – تمرين رقم

بإستعمال تعريف النهايات، أوجد (ϵ,δ)، لدراسة نهاية الدالة x^3 عند 1.

Using the definition of limits, find (ϵ,δ) to study the limit of the function x^3 at 1.

Solution : الحــل

نأخذ $\epsilon > 0$. نبحث عن $\delta > 0$ حيث، إذا كان $|x-1| < \delta$ فإن $|x^3-1| < \epsilon$ (لأن النهاية هي 1). نستطيع أن نفرض أن $\epsilon \leq 1$ فإذا وجد δ من أجل $\epsilon = 1$، نفس الـ δ يوافق $\epsilon \geq 1$.
لكن $\delta > 0$ حيث $|x-1| < \delta$. فإن $1-\delta \leq x \leq 1+\delta$ بتكعيب الأطراف، و لأن الدالة مكعب x^3 متزايدة فإن:

$$1 - 3\delta + 3\delta^2 - \delta^3 \leq x^3 \leq 1 + 3\delta + 3\delta^2 + \delta^3.$$

هذا يكافئ:

$$-3\delta + 3\delta^2 - \delta^3 \leq x^3 - 1 \leq 3\delta + 3\delta^2 + \delta^3.$$

يكفي أن نأخذ $\delta \in]0,1]$ حيث :

$$-3\delta + 3\delta^2 - \delta^3 \geq -\epsilon$$

و

$$3\delta + 3\delta^2 + \delta^3 \leq \epsilon.$$

نفرض أن $\delta \leq c\epsilon$ و $c > 0$ ثابت و منه:

$$3\delta + 3\delta^2 + \delta^3 = 3c\epsilon + 9c^2\epsilon^2 + c^3\epsilon^3 \leq (3c + 9c^2 + c^3)\epsilon$$

لأن $\epsilon \leq 1$ و

$$-3\delta + 3\delta^2 - \delta^3 \geq -3\delta - 3\delta^2 - \delta^2 \geq -(3c + 9c^2 + c^3)\epsilon$$

و باتباع نفس الحسابات، يكفي أن نجد العدد الحقيقي $c > 0$ حيث $3c + 9c^2 + c^3 \leq 1$. على سبيل المثال $c = 1/2$. من أجل $\epsilon \in]0,1]$ نبرهن أنه إذا كان $\delta = \epsilon/2$ فإن

$$|x-1| \leq \delta \implies |x^3 - 1| \leq \epsilon.$$

هذا يثبت أن نهاية x^3 عند 1 تساوي 1.

Exercise N°– 5 – تمرين رقم

لتكن f الدالة المعرفة بـ :

Let f be the function defined by:

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x}$$

1) أوجد مجموعة التعريف $\mathcal{D}_f$ للدالة f.

Find the definition set $\mathcal{D}_f$ of the function f.

2) أحسب $\lim_{x\to 0} f(x)$، هل هي قابلة للتمديد بالإستمرار على $\mathbb{R}$ ؟

Calculate $\lim_{x\to 0} f(x)$, *is it extendable continuously over* $\mathbb{R}$*?*

Solution : الحــل

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$$

- مجموعة التعريف $\mathcal{D}_f$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_f &= \{x \neq 0\}, \\
\mathcal{D}_f &= \left\{1+x>0, 1+x^2>0\ \right\} \\
&\Longrightarrow \mathcal{D}_f = \{x>-1\} \Longrightarrow \mathcal{D}_f =]-1,0[\cup]0,+\infty[.
\end{aligned}$$

- لحساب النهاية نضرب في المرافق ونبسط الكسر

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} &= \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} * \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{1+x-(1+x^2)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)} \\
&= \frac{x-x^2}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)} \\
&= \frac{1-x}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)} \Longrightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

f قابلة للتمديد بالإستمرار على $\mathbb{R}$ والدالة الممددة هي :

$$\widetilde{f} = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

Exercise N°– 6 – تمرين رقم

Let the function g *defined on* $\mathbb{R}$ *be as follows:* لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln|x|} & \textit{if} \ \ x \notin \{0,-1,1\} \\ 0 & \textit{if} \ \ x = 0,-1,1 \end{cases}$$

في أي النقاط الدالة g تكون مستمرة؟
At which points is the function g continuous?

Solution : الحــل

الدالة g هي دالة مستمرة على $\mathbb{R}\backslash\{-1,0,1\}$ باعتبارها مقلوب دالة مستمرة لا ينعدم مقامها.
لندرس استمرارية الدالة g عند 0. لأن

$$\lim_{x\to 0} \ln|x| = -\infty$$

لدينا:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{X\to -\infty} \frac{1}{X} = 0 = g(0).$$

الدالة g مستمرة عند 0. ثم ولأن

$$\lim_{x\to 1^+} \ln|x| = 0^+$$

فإن

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{X\to 0^+} \frac{1}{X} = +\infty \neq g(1).$$

الدالة g ليست مستمرة عند 1. بنفس الطريقة نبرهن أن g ليست مستمرة عند -1.

Exercise N°– 7 – تمرين رقم

1) لتكن الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرفة كما يلي
Let the function $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be defined as follows

$$f(x) = \begin{cases} (ax)^2 & \textit{if } \ x \leq 1, \\ a\sin(\frac{\pi}{2}x) & \textit{if } \ x > 1 \end{cases}$$

حيث $a\in\mathbb{R}$ ثابت حقيقي. ماهي قيم a حتى تكون الدالة f مستمرة؟
where $a\in\mathbb{R}$ is a real constant. What are the values of a for the function f to be continuous?

2) أوجد كل قيم الثابت $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ حتى تكون الدالة $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ التالية مستمرة :
Find all values of the constant $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ such that the following function $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ is continuous:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \textit{if } \ x \leq 0, \\ \alpha e^{-x} + \beta e^{x} + \gamma x(e^{x} - e^{-x}) & \textit{if } \ 0 < x < 1, \\ e^{2-x} & \textit{if } \ x \geq 1. \end{cases}$$

Solution : الحـــل

1) الدالة مستمرة على المجال $]1;+\infty[$ و على $]-\infty;1[$. لأن f مستمرة إذا وفقط إذا كان f يقبل نهاية من اليمين ومن اليسار عند 1 ت قُ س لِمِتس و يجب أن تتساوى النهايتية، لكن لدينا:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = a\sin(\pi/2) = a \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = a^2.$$

الدالة f مستمرة عند 1 إذا وفقط إذا كان $a^2 = a$ يعني إذا وفقط إذا كان $a = 1$ أو $a = 0$.

2) نفعل نفس الشيء، لكن هذه المرة علينا دراسة الاستمرارية على اليمين و على اليسار عند النقطتين 0 و 1، للدالة g من الواضح إستمرارها على المجال $]-\infty;0[$ و المجال $]0;1[$ و على $]1;+\infty[$. و لدينا من جهة:

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0^+} g(x) = \alpha+\beta.$$

ومن جهة أخرى لدينا:

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \alpha e^{-1} + \beta e^1 + \gamma(e^1 - e^{-1}) \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 1^+} g(x) = e^1.$$

الدالة g مستمرة إذا وفقط إذا كانت الثلاثية (α,β,γ) تحقق الجملة التالية:

$$\begin{cases} \alpha+\beta &= 1 \\ e^{-1}\alpha + e^1\beta + (e^1-e^{-1})\gamma &= e^1. \end{cases}$$

لحل الجملة و على سبيل المثال نطرح $e^{-1}L_1$ من L_2. نجد الجملة المكافئة :

$$\begin{cases} \alpha+\beta &= 1 \\ (e^1-e^{-1})\beta + (e^1-e^{-1})\gamma &= e^1 - e^{-1}. \end{cases}$$

نستطيع اختزال القيمة $e^1 - e^{-1}$ من المعادلة الثانية فنجد:

$$\begin{cases} \alpha+\beta &= 1 \\ \beta+\gamma &= 1. \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha &= \gamma \\ \beta &= 1-\gamma \\ \gamma &= \gamma \end{cases}$$

مجموعة الثلاثيات التي من أجلها الدالة g مستمرة هي: $\{(0,1,0)+\gamma(1,-1,1) : \gamma\in\mathbb{R}\}$.

Exercise N°– 8 – تمرين رقم

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ كمايلي :

Let the function f defined on $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ as follows:

$$f(x) = \frac{1+x}{x^3+1}.$$

1) أثبت أنه يمكننا تمديد الدالة f بالإستمرار عند النقطة -1.

Prove that we can extend the function f by continuing at the point -1.

2) حدد القيمة المأخوذة عند -1 لهذا التمديد.

Find the value taken at -1 for this extension.

Solution : الحــل

ينعدم كل من البسط والمقام عند القيمة -1، لذلك لدينا حالة عدم تعيين عند حساب نهاية الدالة f عند -1. لإزالة عدم التعيين هذا، نبسط الكسر بإستخراج العامل المشترك، نجد:

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$$

ومنه تصبح الدالة :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1}.$$

وبالتالي

$$\lim_{x\to -1} f(x) = 1/3$$

نستنتج أن الدالة قابلة للتمديد بالإستمرار والدالة الممددة تكتب على الشكل:

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{1+x}{x^3+1} & \text{إذا كان} \quad x \neq -1, \\ 1/3 & \text{إذا كان} \quad x = -1. \end{cases}$$

Exercise N°– 9 – تمرين رقم

هل الدوال التالية قابلة للاشتقاق في 0 ؟

Are the following functions differentiable at 0?

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}, \quad g(x) = \begin{cases} x\sin(x)\sin(1/x) & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}, \qquad h(x) = |x|\sin x.$$

Solution : الحـــل

حسب التعريف نحسب نسبة التزايد للدالة ونبحث فيما إذا كانت تقبل نهاية عند القيمة 0.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{\frac{x}{1+|x|}}{x}=\frac{1}{1+|x|}\to 1$$

عندما $x\to 0$. الدالة قابلة للإشتقاق عند 0 ومشتقها 1. بالنسبة للدالة g لدينا:

$$\frac{g(x)-g(0)}{x}=\sin(x)\sin(1/x).$$

نستعمل $|\sin x|\leq |x|$ و $|\sin(1/x)|\leq 1$ نستنتج أن:

$$\left|\frac{g(x)-g(0)}{x}\right|\leq |x|.$$

باستعمال نظرية المقارنة، نسبة التزايد تؤول لـ 0 لما x يؤول إلى 0.
الدالة g قابلة للإشتقاق عند 0 مع $g'(0)=0$. من أجل h لدينا:

$$\frac{h(x)-h(0)}{x}=|x|\cdot\frac{\sin x}{x}.$$

لأن $\sin x/x$ يؤول للـ 1 لما x يؤول إلى 0 و $|x|$ يؤول إلى 0 لما x يؤول إلى 0 ومنه نسبة التزايد تؤول لـ 0 لما x يؤول إلى 0 ومنه h قابلة للإشتقاق عند 0 حيث $h'(0)=0$.

Exercise N°– 10 – تمرين رقم

أوجد $a,b\in\mathbb{R}$ بحيث تكون الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}_+$ كما يلي:

Find $a,b\in\mathbb{R}$ such that the function f defined on $\mathbb{R}_+$ is as follows:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & \text{if} \quad 0\leq x\leq 1,\\ ax^2+bx+1 & \text{if} \quad x>1,\end{cases}$$

differentiable at 1. قابلة للإشتقاق عند 1.

Solution : الحـــل

أولا، يجب أنتكون الدالة f مستمرة عند 1.

لدينا :

$$\lim_{x\overset{<}{\to}1} f(x)=\lim_{x\overset{<}{\to}1}\left(\sqrt{x}\right)=1=\lim_{x\overset{>}{\to}1} f(x)=a+b+1.$$

ومنه:

$$a+b+1=1 \Longrightarrow b=-a.$$

لندرس قابلية الإشتقاق عند 1.

الدالة f تتطابق مع الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ على المجال $[0,1]$.

مشتق الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ هو $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$، f يقبل مشتق من يسار العدد 1 والذي قيمته $1/2$.

من جهة أخرى الدالة fتتطابق على المجال $[1,+\infty[$ مع الدالة $x \mapsto ax^2+bx+1$ ومنه مشتقها هو $x \mapsto 2ax+b$.

الدالة f إذا قابلة للإشتقاق عند 1، ومشتقها يساوي $2a+b$.

أخيرا، الدالة f قابلة للإشتقاق عند 1 إذا وفقط إذا كان:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= f'_g(1) = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'_d(1) \\
&\Longleftrightarrow \frac{1}{2} = 2a+b \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-\frac{1}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

Exercise N°– 11 – تمرين رقم

أدرس قابلية إشتقاق الدوال التالية على $\mathbb{R}$:

Study the differentiability of the following functions on $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0. \end{cases}$$

Solution : الحــل

نلاحظ أن f مستمرة عند 0، لأن:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

من جهة أخرى الدالة f هي من الصنف C^1 على على $\mathbb{R}^*$.

لندرس قابلية الإشتقاق عند 0 وبالرجوع للتعريف ندرس نهاية نسبة التزايد :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \longrightarrow 0, x\to 0$$

بفضل خواص الدوال المثلثية في وجود حد علوي وسفلي نجد $|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq |x|$.
وبالتالي الدالة f قابلة للإشتقاق عند 0، مع $f'(0) = 0$. لكي نحدد ما إذا كانت الدالة f من الصنف C^1 عند 0، يجب دراسة استمرارية المشتق عند 0.
وعليه، من أجل $x \neq 0$ لدينا:

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

نضع $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ ومنه x_n يؤول إلى 0 و:

$$f'(x_n) = \frac{1}{n\pi}\sin(2n\pi) - \cos(2n\pi) = -1 \neq f'(0).$$

وبالتالي: f' ليس مستمر عند 0، أي أن الدالة f ليست من الصنف C^1.

بنفس الطريق نعامل الدالة g لكي نبرهن أنها من الصنف C^1 على $\mathbb{R}^*$ قابلة للإشتقاق عند 0 حيث $g'(0) = 0$. إضافة على ذلك، من أجل $x \neq 0$:

$$g'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

حيث:

$$|g'(x) - g'(x)| \leq 3\,|x|^2 + |x|.$$

هذا يدل أن g' مستمر عند 0، ومنه g من الصنف C^1.

Exercise N°– 12 – تمرين رقم

أوجد في كل حالة مجموعة تعريف الدالة ثم مشتقها:

In each case, find the definition set of the function and then its derivative:

1) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + x - 1,$
2) $f(x) = 5x^3 - \dfrac{1}{x} + 3\sqrt{x},$
3) $f(x) = (x^2+1)(x^3-2x),$
4) $f(x) = \dfrac{2x^2-3}{x^2+7},$
5) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1},$
6) $f(x) = -x + 2 + \dfrac{2}{3x},$
7) $f(x) = \dfrac{1}{x+x^2},$
8) $f(x) = (2x+1)^2,$
9) $f(x) = \sqrt{x}(5x-3).$

الحــل : Solution

الدالة f معرفة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ومشتقها:

$$f'(x) = 4\times 3x^2 - 5\times 2x + 1 = 12x^2 - 10x + 1$$

لكي تكون f معرفة يجب أن يكون $x \neq 0$ و $x \geq 0$. ومنه $\mathscr{D}_f =]0;+\infty[$. الدالة مقلوب قابلة للإشتقاق على $]-\infty;0[$ و على $]0;+\infty[$. بالإضافة أن الدالة الجذر التربيعي قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$. ومنه f قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و مشتقها:

$$f'(x) = 15x^2 - \frac{-1}{x^2} + 3\times\frac{1}{2\sqrt{x}} = 15x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{2\sqrt{x}}$$

الدالة f معرفة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\left(x^3 - 2x\right) + \left(x^2 + 1\right)\left(3x^2 - 2\right) \\ &= 2x^4 - 4x^2 + 3^x4 - 2x^2 + 3x^2 - 2 \\ &= 5x^4 - 3x^2 - 2 \end{aligned}$$

f معرفة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ لأن $x^2 + 7 > 0$ من أجل كل x.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4x\left(x^2+7\right) - 2x\left(2x^2-3\right)}{\left(x^2+7\right)^2} \\ &= \frac{4x^3 + 28x - 4x^3 + 6x}{\left(x^2+7\right)^2} \\ &= \frac{34x}{\left(x^2+7\right)^2} \end{aligned}$$

الدالة f معرفة و قابلة للإشتقاق على $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x+1) - (2x-1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2x + 2 - 2x + 1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{3}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

الدالة f معرفة و قابلة للإشتقاق على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 + \frac{2}{3}\times\frac{-1}{x^2} \\ &= -1 - \frac{2}{3x^2} \end{aligned}$$

تكون الدالة f معرفة وقابلة للإشتقاق إذا كان $x+x^2 \neq 0$. أي $x+x^2 = x(x+1)$. ومنه f معرفة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$.

$$f'(x) = -\frac{1+2x}{(x+x^2)^2}$$

الدالة f معرفة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$. $f(x) = (2x+1)(2x+1)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(2x+1) + (2x+1)\times 2 \\ &= 4(2x+1) \\ &= 8x+4 \end{aligned}$$

الدالة f معرفة على $[0;+\infty[$ قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}(5x-3) + 5\sqrt{x} \\ &= \frac{5x-3+10x}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{15x-3}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Exercise N°– 13 – تمرين رقم

أحسب المشتق من الدرجة n للدوال التالية :

Calculate the derivative of degree n for the following functions:

$\mathbf{1}).x \mapsto xe^x \qquad \mathbf{2}).x \mapsto x^{n-1}\ln(1+x).$

Solution : الحــل

1) نضع $f(x) = xe^x$ و نكتب $f(x) = g(x)h(x)$ حيث $g(x) = x$ و $h(x) = e^x$. سوف نستعمل علاقة ليبنيتز

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k g^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x).$$

يتألف هذا المجموع من حدين فقط. في الواقع ، لدينا $g(x) = x$، $g'(x) = 1$، $g^{(k)}(x) = 0$، $k \geq 2$. ولأنه لدينا أيضا $h^{(k)}(x) = e^x$ من أجل كل $k \geq 0$ فإن:

$$f^{(n)}(x) = xe^x + ne^x = (x+n)e^x.$$

2) المشتق من الدرجة n للدالة:

$$x^{n-1}\ln(1+x)$$

نضع $g(x)=x^{n-1}$ و $h(x)=\ln(1+x)$ اللذين هم من الصنف C^{∞} على المجموعتين $\mathbb{R}$، و $]-1,+\infty[$ على الترتيب. نبرهن إذن بالتراجع:

$$g^{(k)}(x)=(n-1)\dots(n-k)x^{n-1-k}=\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!}x^{n-1-k},$$

لأن:

$$h^{(k)}(x)=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$$

من أجل $k>0$. نضع $f(x)=x^{n-1}\ln(1+x)$ ونكتب we write: $f(x)=g(x)h(x)$. نستعمل علاقة ليبنيتز حيث $g^{(n)}=0$ نجد:

$$f^{(n)}(x)=(n-1)!\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\frac{x^{k-1}}{(1+x)^k}.$$

إذا كان $x=0$ نجد أن $f^(n)(0)=n!$. إذا كان $x\neq 0$، نقسم على x لجعله مجموع مبسط، وباستعمال علاقة ثنائي الحد نجد:

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \frac{(n-1)!}{x}\left(1-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{-x}{1+x}\right)^k\right)\\
&= \frac{(n-1)!}{x}\left(1-\left(1+\frac{-x}{1+x}\right)^n\right)\\
&= \frac{(n-1)!}{x}\left(1-\frac{1}{(1+x)^n}\right).
\end{aligned}$$

Exercise N°– 14 – تمرين رقم

لتكن $n\in\mathbb{N}$. أثبت أن المشتق من الدرجة $n+1$ للدالة $x^ne^{1/x}$ هو

Let $n\in eN$. Prove that the derivative of degree $n+1$ of the function $x^ne^{1/x}$ is

$$\frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}}e^{1/x}.$$

Solution : الحــل

الدالة من الصنف C^{∞} على $\mathbb{R}^*$. لنثبت العلاقة المطلوبة بالتراجع على n.

لدينا، من أجل $n=0$، مشتق الدالة $e^{1/x}$ هو $\frac{-1}{x^2}e^{1/x}$. ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.
نفرض أن العلاقة صحيحة من أجل n أي :

$$\left(x^{n-1}e^{1/x}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n e^{1/x}}{x^{n+1}}$$

ولنبرهن صحتها من أجل $n+1$. لهذا نكتب الدالة $x^n e^{1/x}$ على الشكل $x\cdot x^{n-1}e^{1/x}$ ثم نستعمل صيغة ليبنيز لكي نبرهن :

$$\left(x^n e^{1/x}\right)^{(n+1)}=\frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}}e^{\frac{1}{x}}$$

نجد:

$$\begin{aligned}
\left(x^n e^{1/x}\right)^{(n+1)} &= \left(x\left(x^{n-1}e^{1/x}\right)\right)^{(n+1)}=\sum_{k=0}^{n+1}C_n^k\cdot x^{(k)}\cdot\left(x^{n-1}e^{1/x}\right)^{(n+1-k)}\\
&= C_n^0\cdot x^{(0)}\cdot\left(x^{n-1}e^{1/x}\right)^{(n+1-0)}+C_n^1\cdot x^{(1)}\cdot\left(x^{n-1}e^{1/x}\right)^{(n+1-1)}\\
&= 1\cdot x\cdot\left(x^{n-1}e^{1/x}\right)^{(n)}+(n+1)\cdot\left(x^{n-1}e^{1/x}\right)^{(n)}\\
&= x\cdot\left(\frac{(-1)^n e^{1/x}}{x^{n+1}}\right)'+(n+1)\cdot\frac{(-1)^n e^{1/x}}{x^{n+1}}\\
&= x\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+3}}e^{\frac{1}{x}}(x+nx+1)+(n+1)\cdot\frac{(-1)^n e^{1/x}}{x^{n+1}}\\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}}e^{\frac{1}{x}}
\end{aligned}$$

Exercise N°– 15 – تمرين رقم

أوجد النشر المحدود في النقطة a من الرتبة n للدوال التالية:

Find the finite diffusion at point a of order n for the following functions:

$$\begin{array}{lll}
1) & \ln(\cos(x)) & n=6,\quad a=0.\\
2) & \dfrac{\arctan(x)-x}{\sin(x)-x} & n=2,\quad a=0.\\
3) & \ln\left(\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right) & n=3,\quad a=0.\\
4) & \ln(\sin(x)) & n=3,\quad a=\frac{\pi}{4}.\\
5) & (1+x)^{\frac{1}{x}} & n=3,\quad a=0.
\end{array}$$

Solution : الحـــل

- $\ln(\cos x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o\left(x^7\right)$.
- $\frac{\arctan(x) - x}{\sin(x) - x} = 2 - \frac{11}{10}x^2 + o\left(x^3\right)$.
- $\ln(\tan(1/2\,x + 1/4\,\pi)) = x + \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^4\right)$.
- $\ln(\sin x) = \ln(1/2\,\sqrt{2}) + x - \frac{\pi}{4} - \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3\right)$.
- $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e - 1/2\,ex + \frac{11}{24}\,ex^2 - \frac{7}{16}\,ex^3 + o\left(x^3\right)$.

Exercise N°– 16 – تمرين رقم

أوجد النشر المحدود للدالة $h(x) = \cos\big(\ln(1+x)\big)$ عند 0 من الرتبة 3.

Find the limited expansion of the function $h(x) = \cos\big(\ln(1+x)\big)$ at 0 up to the order 3.

Solution : الحـــل

- نضع

$$f(u) = \cos(u) \quad \text{and} \quad g(x) = \ln(1+x)$$

ومنه :

$$f \circ g(x) = \cos\big(\ln(1+x)\big) \quad \text{and} \quad g(0) = 0$$

.

- نكتب النشر المحدودمن الرتبة 3 للدالة

$$f(u) = \cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + u^3\epsilon_1(u)$$

من أجل u في جوار 0.

- نضع

$$u = g(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_2(x)$$

من أجل x في جوار 0.

- نحسب u^2:

$$u^2 = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_2(x)\right)^2 = x^2 - x^3 + x^3\epsilon_3(x)$$

و u^3 :

$$u^3 = x^3 + x^3\epsilon_4(x)$$

.

- ومنه:

$$\begin{aligned} h(x) &= f\circ g(x) = f(u) \\ &= 1 - \frac{u^2}{2!} + u^3\epsilon_1(u) \\ &= 1 - \frac{x^2 - x^3}{2!} + x^3\epsilon(x) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + x^3\epsilon(x). \end{aligned}$$

القسم ب

الجزء الثاني : الجبـــــر 1: Part Two Algebra

الفصل الثالث

الفضاءات الشعاعية $Vector\ Spaces$

1.3 سلسلة التمارين رقم $Exercise\ series\ N^\circ\ 3$

تمرين رقم – Exercise N°– 1

1) نزود المجموعة $\mathbb{R}$ بقانون التركيب الداخلي $\bigstar$ المعرف كما يلي:

We provide the set $\mathbb{R}$ with the internal composition law $\bigstar$ defined as follows:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x\bigstar y = xy + \left(x^2 - 1\right)\left(y^2 - 1\right)$$

أثبت أن $\bigstar$ تبديلي وليس تجميعي وأن 1 هو العنصر الحيادي.

Prove that $\bigstar$ is commutative, not additive, and that 1 is the neutral element.

2) نزود المجموعة $\mathbb{R}_+^*$ بقانون التركيب الداخلي $\bigstar$ المعرف كما يلي:

We provide the set $\mathbb{R}_+^*$ with the internal composition law $\bigstar$ defined as follows:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* : x\bigstar y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

A) أثبت أن $\bigstar$ تبديلي و تجميعي وأن 0 هو العنصر الحيادي.

Prove that $\bigstar$ is commutative and additive and that 0 is the neutral element.

B) أثبت أنه لايوجد في $\mathbb{R}_+^*$ أي عنصر نظير بالنسبة للعملية $\bigstar$.

Prove that there is no element in $\mathbb{R}_+^*$ that is an opposite with respect to the operation $\bigstar$.

Solution : الحــل

1) نلاحظ أن

$$x\bigstar y = xy + (x^2-1)(y^2-1) = yx + (y^2-1)(x^2-1) = y\bigstar x$$

ومنه القانون $\bigstar$ تبديلي

لإثبات أن القانون ليس تجميعيا، يكفي العثور على x و y و z بحيث:

$$x\bigstar(y\bigstar z) \neq (x\bigstar y)\bigstar z$$

كما سنرى أدناه أن 1 هو العنصر الحيادي، ومنه يجب أن لا نأخذ 1 في إختيار العناصر x و y و z. نأخذ على سبيل المثال: $x=0$ ، $y=2$ و $z=3$

$$\begin{aligned}
x\bigstar(y\bigstar z) &= 0\bigstar(2\bigstar 3)\\
&= 0\bigstar(2\bigstar 3 + (2^2-1)(3^2-1))\\
&= 0\bigstar(6+3\times 8)\\
&= 0\bigstar 30\\
&= 0\bigstar 30 + (0^2-1)(30^2-1) = -899
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(x\bigstar y)\bigstar z &= (0\bigstar 2)\bigstar 3\\
&= (0\times 2 + (0^2-1)(2^2-1))\bigstar 3\\
&= (-3)\bigstar 3\\
&= -3\times 3 + ((-3)^2-1)(3^2-1)\\
&= -9+82\\
&= 55
\end{aligned}$$

القانون $\bigstar$ ليس تجميعيا.

$$1\bigstar x = 1\cdot x + (1^2-1)(x^2-1) = x$$

بالإضافة لذلك ، لأن القانون تبديلي فإن:

$$x\bigstar 1 = 1\bigstar x$$

لدينا $x\bigstar 1 = 1\bigstar x = x$، 1 هو العنصر الحيادي.

2) A) لدينا

$$x\bigstar y = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{y^2+x^2} = y\bigstar x$$

القانون $\bigstar$ تبديلي.

$$(x\bigstar y)\bigstar z = \sqrt{x^2+y^2}\bigstar z = \sqrt{(\sqrt{x^2+y^2})+z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

بإعادة الحساب أعلاه عن طريق تغيير (x,y,z) بـ (y,z,x) نجد :

$$(y\bigstar z)\bigstar x = \sqrt{y^2+z^2+x^2}$$

لأن $\bigstar$ تبديلي، ومنه : القانون $\bigstar$ تجميعي.

$$(y\bigstar z)\bigstar x = x\bigstar(y\bigstar z)(x\bigstar y)\bigstar z = x\bigstar(y\bigstar z)$$

كان بإمكاننا الحساب مباشرة $x\bigstar(y\bigstar z)$ لأن $\bigstar$ تبديلي فإن 0 هو العنصر الحيادي.

$$0\bigstar x = \sqrt{0^2+x^2} = |x| = x, \qquad \text{لأن} \quad x \geq 0$$

$$0\bigstar x = x\bigstar 0$$

$$0\bigstar x = x\bigstar 0 = x$$

B) لنفترض أن x يقبل نظير y

$$x\bigstar y = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$$

في حين $x > 0$ و $y > 0$ ومنه $x\bigstar y = 0$ مستحيل من أجل كل $x > 0$ أي x ليس له نظير.

تمرين رقم – 2 – Exercise N°

لیکن $G=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ و $\bigstar$ القانون المعرف في G كما يلي:

Let $G=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ and $\bigstar$ be the law defined in G as follows:

$$(x,y)\bigstar(x',y')=(xx',xy'+y)$$

1) أثبت أن $(G,\bigstar)$ زمرة ليست تبديلية.

Prove that $(G,\bigstar)$ is a non-commutative group.

2) أثبت أن $(]0,+\infty[\times\mathbb{R},\bigstar)$ زمرة جزئية من $(G,\bigstar)$.

Prove that $(]0,+\infty[\times\mathbb{R},\bigstar)$ is a sub-group of $(G,\bigstar)$.

الحــل : Solution

$1-A$) إذا كان $x\neq 0$ و $x'\neq 0$ فإنه $xx'\neq 0$

$$(x,y)\bigstar(x',y')=(xx',xy'+y)\in\mathbb{R}^*\cdot\mathbb{R}.$$

القانون $\bigstar$ هو قانون تركيب داخلي.

$$\begin{aligned}(x,y)\bigstar((x',y')*(x'',y'')) &= (x,y)*(x'x'',x'y''+y')\\ &= (xx'x'',x(x'y''+y')+y)\\ &= (xx'x'',xx'y''+xy'+y)\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}((x,y)\bigstar(x',y'))\bigstar(x'',y'') &= (xx',xy'+y)*(x'',y'')\\ &= (xx'x'',xx'y''+xy'+y)\end{aligned}$$

ومنه القانون $\bigstar$ تجميعي.

$1-B$) لتكن (a,b) حيث من أجل كل $(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$:

$$(a,b)\bigstar(x,y)=(x,y)=(x,y)\bigstar(a,b)$$

هذه المساوات مكافئة لـ:

$$(ax,ay+b)=(x,y)=(xa,xb+y)\Leftrightarrow\begin{cases}ax=x\\ ay+b=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=0\end{cases}$$

ومنه $(1,0)$ هو العنصر الحيادي.

$(C-1$ ليكن $(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ نبحث عن (x',y') حيث

$$(x,y)\bigstar(x',y')=(1,0)=(x',y')\bigstar(x,y)$$

هذه المساواة مكافئة لـ:

$$(xx',xy'+y)=(1,0)=(x'x,x'y+y')\Leftrightarrow\begin{cases}xx'=1\\ x'y+y'=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=\frac{1}{x}\\ y'=\frac{-y}{x}\end{cases}$$

العنصر النظير لـ (x,y) هو $(\frac{1}{x},\frac{-y}{x})$. ومنه $(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},\bigstar)$ تشكل زمرة.

$(D-1$ بما أن $(1,2)\bigstar(2,0)=(2,2)$ و $(2,0)\bigstar(1,2)=(2,4)$ فمن الواضح جدا أن الزمرة ليست تبديلية.

$(2$ العنصر الحيادي لـ $(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},\bigstar)$ هو $(1,0)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$.
ليكن $(x,y)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ و $(x',y')\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. ومنه

$$(x,y)\bigstar\left(\frac{1}{x'},\frac{-y'}{x'}\right)=\left(\frac{x}{x'},x\left(\frac{-y'}{x'}\right)+y\right)=\left(\frac{x}{x'},\frac{-y'x+x'y}{x'}\right)$$

بما أن $x>0$ فإن $\left(\frac{x}{x'},\frac{-y'x+x'y}{x'}\right)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. ومنه $(\in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\bigstar)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},\bigstar)$.

Exercise N°– 3 – تمرين رقم

نزود المجموعة $A=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ بالقانونين المعرفين كما يلي:

We provide the set $A=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ with the two laws defined as follows:

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$$

and و

$$(x,y)*(x',y')=(xx',xy'+x'y)$$

$(1$ أثبت أن $(A,+)$ زمرة تبديلية.

Prove that $(A,+)$ is a commutative group.

$(2$ أثبت أن

Prove that

$(A$ القانون $*$ تبديلي.

The law $*$ is commutative.

$(B$ القانون $*$ تجميعي.

The law $*$ is associative.

$C)$ اوجد العنصر الحيادي بالنسبة للقانون $*$.
Find the neutral element with respect to the law $*$.

$D)$ أثبت أن $(A, +, *)$ تشكل حلقة تبديلية.
Prove that $(A, +, *)$ forms a commutative ring.

Solution : الحـــل

1)

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \in A$$

ومنه القانون داخلي.

$$\begin{aligned}(x, y) + [(x', y') + (x'', y'')] &= (x, y) + (x' + x'', y' + y'') \\ &= (x + (x' + x''), y + (y' + y'')) \\ &= ((x + x') + x'', (y + y') + y'') \\ &= [(x, y) + (x', y')] + (x'', y'')\end{aligned}$$

ومنه القانون $+$ تجميعي.

$$\begin{aligned}(x, y) + (x', y') &= (x + x', y + y') = (x' + x, y' + y) \\ &= (x', y') + (x, y)\end{aligned}$$

ومنه القانون $+$ تبديلي.
ليكن (a, b) حيث $(x, y) + (a, b) = (x, y)$، من الواضح أن $(a, b) = (0, 0)$ هو العنصر الوحيد الحيادي .
ليكن (x', y') حيث

$$(x, y) + (x', y') = (0, 0)$$

هذا يكافئ

$$(x + x', y + y') = (0, 0) \Longleftrightarrow \begin{cases} x + x' = 0 \\ y + y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

ومنه العنصر النظير (x, y) هو $(-x, -y)$. نستنتج أن $(A, +)$ زمرة تبديلية.

$(A-2$

$$(x, y) * (x', y') = (xx', xy' + x'y) = (x'x, x'y + xy') = (x', y') * (x, y)$$

ومنه $*$ تبديلي.

$(B-2$

$$\begin{aligned}[(x,y)*(x',y')]*(x'',y'') &= (xx',xy'+x'y)*(x'',y'')\\ &= (xx'x'',xx'y''+x''(xy'+x'y))\\ &= (xx'x'',xx'y''+x''xy'+x''x'y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x,y)*[(x',y')*(x'',y'')] &= (x,y)*(x'x'',x'y''+x''y')\\ &= (xx'x'',x(x'y''+x''y')+x'x''y)\\ &= (xx'x'',xx'y''+xx''y'+x'x''y)\end{aligned}$$

ومنه

$$[(x,y)*(x',y')]*(x'',y'')=(x,y)*[(x',y')*(x'',y'')]$$

القانون $*$ تجميعي.

$(C-2$ ليكن (e,f) حيث من أجل كل $(x,y)\in A$،

$$(x,y)*(e,f)=(x,y)$$

e و f تحقق :

$$\begin{cases} xe=x \\ xf+ye=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e=1 \\ f=0 \end{cases}$$

$(1,0)\in A$ العنصر الحيادي لـ A بالنسبة للقانون $*$.

$(D-2$ توزيعية الجداء على الجمع

$$\begin{aligned}(x,y)*[(x',y')+(x''+y'')] &= (x,y)*(x'+x'',y'+y'')\\ &= (x(x'+x''),x(y'+y'')+(x'+x'')y)\\ &= (xx'+xx'',xy'+xy''+x'y+x''y)\\ &= (xx'+xx'',xy'+x'y+xy''+x''y)\\ &= (xx',xy'+x'y)+(xx'',xy''+x''y)\\ &= (x,y)*(x',y')+(x,y)*(x'',y'')\end{aligned}$$

في الأخير $(A,+,*)$ حلقة تبدلية.

تمرين رقم – 4 –Exercise N°

أوجد معادلات الفضاءات الشعاعية التي تم إنشاؤها بواسطة الأشعة التالية:

Find the equations of the victor spaces created by the following rays:

- $u_1 = (1,2,3)$
- $u_1 = (1,2,3)$ and $u_2 = (-1,0,1)$
- $u_1 = (1,2,0)$ ، $u_2 = (2,1,0)$ and $u_3 = (1,0,1)$

الحــل : Solution

نضع F الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بالشعاع u_1. ومنه

$$(x,y,z) \in F \iff \exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} x &= a \\ y &= 2a \\ z &= 3a \end{cases} \iff \exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} a &= x \\ y-2x &= 0 \\ z-3x &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y-2x &= 0 \\ z-3x &= 0 \end{cases}$$

لقد وجدنا بالفعل معادلات لـ F. نضع G الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بالأشعة u_1 و u_2. ومنه:

$$(x,y,z) \in G \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x &= a-b \\ y &= 2a \\ z &= 3a+b \end{cases}$$

$$\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} a &= y/2 \\ b &= z-3y/2 \\ 0 &= x-2y+z \end{cases}$$

$$\iff x-2y+z=0.$$

هذه المعادلة الأخيرة هي معادلة G. نضع H الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بالأشعة u_1، u_2 و u_3. ومنه :

$$(x,y,z) \in H \iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} x &= a+2b+c \\ y &= 2a+b \\ z &= c \end{cases}$$

$$\iff \exists (a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \begin{cases} a+2b+c &= x\\ -3b-2c &= y-2x\\ c &= z\end{cases}$$

الجملة تقبل حلا مهما كانت قيم x، y و z. و بالتالي $H=\mathbb{R}^3$.

Exercise N°– 5 – تمرين رقم

أوجد الأشعة المولدة للفضاءات الجزئية التالية من $\mathbb{R}^3$:

Find the generated rays of the following subspaces of $\mathbb{R}^3$*:*

- $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x+2y-z=0\}$
- $G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x-y+z=0\ \ and\ \ 2x-y-z=0\}$

Solution : الحـــل

- لدينا

$$\begin{aligned}(x,y,z)\quad &\in\quad F\iff x=-2y+z\iff\begin{cases}x=-2y+z\\ y\in\mathbb{R}\\ z\in\mathbb{R}\end{cases}\\ &\iff\quad (x,y,z)=(-2y+z,y,z),y\in\mathbb{R},z\in\mathbb{R},\\ &=\quad y(-2,1,0)+z(1,0,1),y\in\mathbb{R},z\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

نضع $u_1=(-2,1,0)$ و $u_2=(1,0,1)$ و منه نجد $F=vect(u_1,u_2)$.

- لدينا

$$(x,y,z)\in G\iff\begin{cases}x-y+z &= 0\\ 2x-y-z &= 0\end{cases}\iff\begin{cases}x-y+z &= 0\\ y-3z &= 0\end{cases}$$
$$\iff (x,y,z)=z\,(2,3,1)$$

و منه نجد $G=vect(u)$ حيث $u=(2,3,1)$

Exercise N°– 6 – تمرين رقم

Let be in $\mathbb{R}^4$ *the vectors*   ليكن في $\mathbb{R}^4$ الأشعة

$$v_1 = (1,2,3,4) \quad and \quad v_2 = (1,-2,3,-4).$$

- هل نستطيع إيجاد x و y حيث $(x,1,y,1) \in Vect\{v_1,v_2\}$ ؟

Can we find x *and* y *where* $(x,1,y,1) \in Vect\{v_1,v_2\}$*?*

- هل نستطيع إيجاد x و y حيث $(x,1,1,y) \in Vect\{v_1,v_2\}$ ؟

Can we find x *and* y *where* $(x,1,1,y) \in Vect\{v_1,v_2\}$*?*

Solution : الحـــل

- لنا:

$$\begin{aligned}
& (x,1,y,1) \in Vect\{v_1,v_2\} \\
\Longleftrightarrow & \ \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \quad (x,1,y,1) = \lambda(1,2,3,4) + \mu(1,-2,3,-4) \\
\Longleftrightarrow & \ \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \quad (x,1,y,1) = (\lambda,2\lambda,3\lambda,4\lambda) + (\mu,-2\mu,3\mu,-4\mu) \\
\Longleftrightarrow & \ \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \quad (x,1,y,1) = (\lambda+\mu,2\lambda-2\mu,3\lambda+3\mu,4\lambda-4\mu) \\
\Longrightarrow & \ \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \quad 1 = 2(\lambda-\mu) \ \text{و} \ 1 = 4(\lambda-\mu) \\
\Longrightarrow & \ \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \quad \lambda-\mu = \frac{1}{2} \ \text{و} \ \lambda-\mu = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

وهو مستحيل (أيا كان x,y). لذلك لا يمكننا العثور على مثل x,y.

- بنفس المنطق :

$$\begin{aligned}
&(x,1,1,y)\in Vect\{v_1,v_2\}\\
&iff\ \exists\lambda,\mu\in\mathbb{R}\quad (x,1,1,y)=(\lambda+\mu,2\lambda-2\mu,3\lambda+3\mu,4\lambda-4\mu)\\
&\Longleftrightarrow \exists\lambda,\mu\in\mathbb{R}\quad \begin{cases} x &= \lambda+\mu\\ 1 &= 2\lambda-2\mu\\ 1 &= 3\lambda+3\mu\\ y &= 4\lambda-4\mu\end{cases}\\
&\Longleftrightarrow \exists\lambda,\mu\in\mathbb{R}\quad \begin{cases} \lambda &= \frac{5}{12}\\ \mu &= -\frac{1}{12}\\ x &= \frac{1}{3}\\ y &= 2.\end{cases}
\end{aligned}$$

لذا فإن الشعاع الوحيد $(x,1,1,y)$ الذي يناسب $(\frac{1}{3},1,1,2)$.

الفصل الرابع

التطبيقات الخطية *Linear applications*

1.4 سلسلة التمارين رقم 4 *Exercise series N° 4*

تمرين رقم – 1 – Exercise N°

حدد إذا كانت التطبيقات التالية عبارة عن تطبيقات خطية أم لا:

Determine whether the following applications are linear applications or not:

(1 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\ (x,y)\mapsto(x+y,\quad x-2y,0)$

(2 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\ (x,y)\mapsto(x+y,\quad x-2y,1)$

(3 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto x^2-y^2$

الحـــل : Solution

(1 ليكن f تطبيق خطي. نأخذ $u=(x,y)$ و $v=(x',y')$ في $\mathbb{R}^2$، و $\lambda\in\mathbb{R}$. ومنه

$$\begin{aligned} f(u+v) &= \big((x+x')+(y+y'),(x+x')-2(y+y'),0\big) \\ &= \big(x+y,x-2y,0\big)+(x'+y',x'-2y',0) \\ &= f(u)+f(v). \end{aligned}$$

كذلك،

$$\begin{aligned} f(\lambda u) &= (\lambda x + \lambda y, \lambda x - 2\lambda y, 0) \\ &= \lambda(x + y, x - 2y, 0) \\ &= \lambda f(u). \end{aligned}$$

2) f : ليست تطبيق خطي لأن $f\big((0,0)\big) \neq (0,0,0)$

3) f ليست تطبيق خطي لأن،

$$f\big((1,0)\big) = 1,\ f\big((-1,0)\big) = 1 \quad \text{و} \quad f\big((0,0)\big) = 0 \neq f\big((1,0)\big) + f\big((-1,0)\big).$$

تمرين رقم – 2 – Exercise N°

لیكن التطبيق الخطي $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ المعرف: *Let the linear application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ be defined*

$$f(x, y) = (x + y, x - y, x + y).$$

أوجد نواة التطبق الخطي f، و صورته. و هل هو متباين؟ غامر؟

Find the kernel of the linear application f, and its image. And is it injective? surjective?

الحــل : Solution

1) إيجاد نواة التطبيق الخطي f .

$$Ker(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = (0,0,0)\}.$$

هذا يكافئ:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x = 0 \end{cases}$$

نستنتج أن $Ker(f) = (0,0)$.

2) بما أن $Ker(f) = (0,0)$، حسب النظرية فإن f متباين.

3) إيجاد صورة التطبيق الخطي f. ليكن (u, v, w) شعاع من $\mathbb{R}^3$. نقول أن (u, v, w) من مجموعة صور التطبق الخطي f إذا و فقط إذا كان:

$$\exists(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ (u,v,w)=f(x,y) \iff \exists(x,y)\in\mathbb{R}^2, \begin{cases} u &= x+y \\ v &= x-y \\ w &= x+y \end{cases}$$

$$\iff \exists(x,y)\in\mathbb{R}^2, \begin{cases} u &= x+y \\ u+v &= 2x \\ w-u &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \exists(x,y)\in\mathbb{R}^2, \begin{cases} \frac{u-v}{2} &= y \\ \frac{u+v}{2} &= x \\ w-u &= 0 \end{cases}$$

نستنتج أن

$$Im(f)=\{(u,v,w)\in\mathbb{R}^3;\ u-w=0\}.$$

بصفة خاصة، $(1,1,0)$ لا ينتمي للمجموعة $Im(f)$، ومنه f ليس غامر.

Exercise N°– 3 – تمرين رقم

Let the linear application $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ be defined ليكن التطبيق الخطي $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ المعرف:

$$f(x,y,z)=(x+z,\quad y-x,\quad z+y,\quad x+y+2z).$$

Find a basis for $Im(f)$. 1) أوجد أساسا لـ $Im(f)$.

Find a basis for $Ker(f)$. 2) أوجد أساسا لـ $Ker(f)$.

Is f injective? Surjective? Bijective? 3) هل f متباين؟ غامر؟ تقابلي؟

Solution : الحـــل

1) نستعمل تعريف التطبيق الخطي f نجد:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= (1,-1,0,1) \\ f(e_2) &= (0,1,1,1) \\ f(e_3) &= (1,0,1,2) \end{aligned}$$

يمكن أن نلاحظ أن:

$$f(e_3) = f(e_1) + f(e_2)$$

أي أن الأشعة $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ مرتبطة خطيا، كما نعلم أن الأشعة $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ مولدة لـ $Im(f)$ ومنه $Im(f)$ مولدة من $\{f(e_1), f(e_2)\}$ وهي تكون أساس لها.

2) لدينا

$$(x,y,z) \in \ker(f) \iff \begin{cases} x+z &= 0 \\ -x+y &= 0 \\ y+z &= 0 \\ x+y+2z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+z &= 0 \\ y+z &= 0 \\ y+z &= 0 \\ y+z &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x &= -z \\ y &= -z \\ z &= z \end{cases}$$

نستنتج أن الشعاع $(-1,-1,1)$ يولد $Ker(f)$ نظراً لأنه غير معدوم، فهو أساس $Ker(f)$ ومنه

$$\dim(Ker(f)) = 1.$$

3) حسب نظرية النواة والصورة فإن التطبيق f ليس غامر لأن النواة ذات البعد 1 في حين بعد $Im(f)$ لا يساوي 3 لأن

$$Im(f) = Vect\{f(e_1), f(e_2)\} \Longrightarrow \dim(Im(f)) = 2.$$

Exercise N°– 4 – تمرين رقم

حدد ما إذا كان التطبيق f_i خطيا أم لا :

Determine whether the application f_i is linear or not:

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 &\quad f_1(x,y) = (2x+y, x-y) \\ f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 &\quad f_2(x,y,z) = (xy, x, y) \\ f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 &\quad f_3(x,y,z) = (2x+y+z, y-z, x+y) \\ f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 &\quad f_4(x,y) = (y, 0, x-7y, x+y) \\ f_5 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3 &\quad f_5(P) = \big(P(-1), P(0), P(1)\big) \end{aligned}$$

Solution : الحــل

1) f_1 تطبيق خطي. ليكن $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ و $(x',y')\in\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f_1\big((x,y)+(x',y')\big) &= f_1\big(x+x', y+y'\big) \\ &= \big(2(x+x')+(y+y'), (x+x')-(y+y')\big) \\ &= \big(2x+y+2x'+y', x-y+x'-y'\big) \\ &= \big(2x+y, x-y\big)+\big(2x'+y', x'-y'\big) \\ &= f_1(x,y)+f_1(x',y') \end{aligned}$$

ليكن $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ و $\lambda\in\mathbb{R}$:

$$f_1\big(\lambda\cdot(x,y)\big)=f_1\big(\lambda x,\lambda y\big)=\big(2\lambda x+\lambda y,\lambda x-\lambda y\big)=\lambda\cdot\big(2x+y,x-y\big)=\lambda\cdot f_1(x,y).$$

2) f_2 ليس تطبيق خطي على سبيل المثال $f_2(1,1,0)+f_2(1,1,0)$ ليست مساوية لـ $f_2(2,2,0)$.

3) f_3 تطبيق خطي : نتحقق من أجل (x,y,z) و (x',y',z') أن

$$f_3\big((x,y,z)+(x',y',z')\big)=f_3(x,y,z)+f_3(x',y',z')$$

. بعدها من أجل (x,y,z) و λ لدينا $f_3\big(\lambda\cdot(x,y,z)\big)=\lambda\cdot f_3(x,y,z)$.

4) f_4 تطبيق خطي : نتحقق من أجل (x,y) و (x',y') أن

$$f_4\big((x,y)+(x',y')\big)=f_4(x,y)+f_4(x',y').$$

بعدها، ومن أجل (x,y) و λ لدينا $f_4\big(\lambda\cdot(x,y)\big)=\lambda\cdot f_4(x,y)$.

5) f_5 تطبيق خطي : لتكن $P,P'\in\mathbb{R}_3[X]$ فإن

$$\begin{aligned} f_5\big(P+P'\big) &= \big((P+P')(-1),(P+P')(0),(P+P')(1)\big) \\ &= \big(P(-1)+P'(-1),P(0)+P'(0),P(1)+P'(1)\big) \\ &= \big(P(-1),P(0),P(1)\big)+\big(P'(-1),P'(0),P'(1)\big) \\ &= f_5(P)+f_5(P') \end{aligned}$$

و إذا كان $P \in \mathbb{R}_3[X]$ و $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_5\big(\lambda \cdot P\big) &= \big((\lambda P)(-1), (\lambda P)(0), (\lambda P)(1)\big) \\ &= \big(\lambda \cdot P(-1), \lambda \cdot P(0), \lambda \cdot P(1)\big) \\ &= \lambda \cdot \big(P(-1), P(0), P(1)\big) \\ &= \lambda \cdot f_5(P) \end{aligned}$$

Exercise N°– 5 – تمرين رقم

ليكن التطبيق الخطي $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ المعرف:

Let the linear application be $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ defined as:

$$f(x, y, z) = (-3x - y + z,\ \ 8x + 3y - 2z,\ \ -4x - y + 2z).$$

1) أوجد أساس لنواة التطبيق f وأحسب بُعدها.

Find a basis for the kernel of application f and calculate its dimension.

2) هل التطبيق f متباين؟ — *Is the application f injective?*

3) أوجد رتبة f. هل التطبيق f غامر؟ — *Find the range of f. Is the application f surjective?*

4) أوجد أساس لـ $Im(f)$. — *Find a basis for $Im(f)$.*

Solution : الحـــل

1) ليكن $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. لدينا $(x, y, z) \in ker(f)$ إذا وفقط إذا كان :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -3x & - & y & + & z & = & 0 \\ 8x & + & 3y & - & 2z & = & 0 \\ -4x & - & y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} z & - & y & - & 3x & = & 0 \\ -2z & + & 3y & + & 8x & = & 0 \\ 2z & - & y & - & 4x & = & 0 \end{array}\right.$$

ثم ، بإضافة (إزالة على التوالي) ضعف السطر الأول إلى الثاني (على التوالي الثالث)، نجد:

$$\left\{\begin{array}{rrcrcl} z & -y & - & 3x & = & 0 \\ & y & + & 2x & = & 0 \\ & y & + & 2x & = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcl} z & & -x & = & 0 \\ & y & +2x & = & 0 \end{array}\right. .$$

وبالتالي $(x,y,z) \in ker(f)$ إذاوفقط إذا كان (x,y,z) حل هذه الجملة أي:

$$(x,y,z) = (x,-2x,x) = x(1,-2,1).$$

ومنه نأخذ كأساس لنواة التطبق f الشعاع $(1,-2,1)$ أي الأساس يتكون من عنصر واحد يعني $\dim(ker(f)) = 1$.

2) النواة لا تتطابق مع الفضاء المعدوم $\{0\}$ ومنه f ليس متباين.

3) حسب نظرية الرتبة لدينا:

$$rg(f) = 3 - \dim(ker(f)) = 3 - 1 = 2.$$

التطبيق f ليس غامر : لأن بُعد فضاء الصورة يساوي 2 يختلف عن فضاء الوصول الذي هو $\mathbb{R}^3$ ذو البُعد 3.

4) إيجاد فضاء الصور للتطبيق f. لدينا:

$$\begin{aligned} Im(f) &= \{x(-3,8,-4) + y(-1,3,-1) + z(1,-2,2) \ : \ x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= vect(u_1,u_2,u_3), \end{aligned}$$

حيث نضع $u_1 = (-3,8,-4)$، $u_2 = (-1,3,-1)$ و $u_3 = (1,-2,2)$. من السؤال السابق فإن رتبة التطبيق f هي 2. من جهة أخرى الجملة (u_1,u_2) مستقلة خطيا فهي تشكل أساس لـ $Im(f)$.

Exercise N°– 6 – تمرين رقم

ليكن التشاكل الذاتي f من $\mathbb{R}^3$ حيث مصفوفته في الأساس القانوني (e_1,e_2,e_3) معرفة كما يلي:

Let the ondomorphism f of $\mathbb{R}^3$ whose matrix in the canonical basis (e_1,e_2,e_3) is defined as follows:

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Prove that the vectors أثبت أن الأشعة

$$e'_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3, \quad e'_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3, \quad e'_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$$

تشكل أساس للفضاء $\mathbb{R}^3$ ثم أوجد مصفوفة f بالنسبة لهذا الأساس.

form a basis for the space $\mathbb{R}^3$, then find the matrix f with respect to this basis.

Solution : الحـــل

نرمز بـ $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ للأساس القديم و للأساس الجديد بـ $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$. لتكن P مصفوفة العبور التي أعمدتها هي مركبات الأشعة التي تنتج من التعبير عن مركبات أشعة الأساس الجديد $\mathcal{B}'$ بدلالة الأساس القديم $\mathcal{B}$ نجد:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

نتحقق أن P عكوسة، وبحساب مقلوبها نجد أن $\mathcal{B}'$ يشكل أساس، بالإضافة إلى ذلك :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ نحسب } B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

B هي مصفوفة التطبيق f في الأساس $\mathcal{B}'$.

Exercise N°– 7 – تمرين رقم

ليكن التشاكل الذاتي f من $\mathbb{R}^2$ حيث مصفوفته

Let the ondomorphism f of $\mathbb{R}^2$ where its matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

في الأساس القانوني، وليكن

on the canonical basis, so let

$$e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ and } e_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

1) أثبت أن $\mathcal{B}' = (e_1, e_2)$ أساس للفضاء $\mathbb{R}^2$ ثم أوجد المصفوفة $Mat_{\mathcal{B}'}(f)$.

Prove that $\mathcal{B}' = (e_1, e_2)$ is a basis for the space $\mathbb{R}^2$ and then find the matrix $Mat_{\mathcal{B}'}(f)$.

2) أحسب A^n من أجل $n \in \mathbb{N}$.

Calculate A^n for $n \in \mathbb{N}$.

3) حدد مجموعة المتتاليات الحقيقية التي تحقق:

Determine the set of real sequences that satisfy:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + \dfrac{2}{3}y_n \\ y_{n+1} = -\dfrac{5}{2}x_n - \dfrac{2}{3}y_n \end{cases}$$

Solution : الحـــل

1) **نضع** P **مصفوفة العبور من الأساس القانوني** $\mathcal{B} = \big((1,0),(0,1)\big)$ **نحو الأساس** $\mathcal{B}' = (e_1, e_2)$. **مكونة من أشعة الأعمدة** e_1 **و** e_2 **:**

$$P = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$\det P = -4 \neq 0$ **ومنه** P **عكوسة وبالتالي** $\mathcal{B}'$ **أساس.**

ومنه مصفوفة f **في الأساس** $\mathcal{B}'$ **هي :**

$$B = P^{-1}AP = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

2) **من السهل جدا حساب قوة مصفوفة قطرية :**

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$$

بما أن $A = PBP^{-1}$ **نستنتج بعدها** A^n **:**

$$A^n = \left(PBP^{-1}\right)^n = PB^nP^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 10 - \frac{6}{3^n} & 4 - \frac{4}{3^n} \\ -15 + \frac{15}{3^n} & -6 + \frac{10}{3^n} \end{pmatrix}$$

3) **إذا وضعنا** $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ **ومنه المعادلات التي تحقق هته المتتاليات تكتب على الشكل المصفوفي كما يلي:**

$$X_{n+1} = AX_n.$$

إذا وضعنا الشرط الإبتدائي $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ **فإن:** $X_n = A^nX_0$. **ونستنتج أن:**

$$\begin{cases} x_n &= \frac{1}{4}\Big((10 - \frac{6}{3^n})x_0 + (4 - \frac{4}{3^n})y_0\Big) \\ y_n &= \frac{1}{4}\Big((-15 + \frac{15}{3^n})x_0 + (-6 + \frac{10}{3^n})y_0\Big). \end{cases}$$

المصادر

[1] Allab, K. Eléments d'analyse : fonction d'une variable réelle O.P.U., 1986.

[2] Azouly, E., Avignant, J. Auliac, G. Les mathématiques en Licence, 1ére. Tome 1: Cours+ exos, MIAS. MASS. SM, Ediscience (Dunod pour la nouvelle édition) Paris 2003.

[3] Azouly, E., Avignant, J. Auliac, G. Les mathématiques en Licence, 1ére. Tome 2: Cours+ exos, MIAS. MASS. SM, Ediscience (Dunod pour la nouvelle édition) Paris 2003.

[4] Azouly, E., Avignant, J. Auliac, G. Problèmes Corrigés de mathématiques , DEUG MIAS/SM, Ediscience (Dunod pour la nouvelle édition) Paris 2002.

[5] Baba-Hamed. C, Benhabib. K, Analyse. Rappel de cours et exercices avec solutions. O.P.U., 1993.

[6] Baba-Hamed. C, Benhabib. K, Algèbre. Rappel de cours et exercices avec solutions. O.P.U., 1990.

[7] Bayart, F. Bibmath.net, https://www.bibmath.net/

[8] Chambadal, L. Exercices et problèmes résolus d'analyse : mathématiques spéciales. Bordas, 1973.

[9] Exo7 Cours et exercices de mathématiques, http://exo7.emath.fr/un.html

[10] Godement, R. Cours d'algèbre. Hermann, 1966.

[11] Grifone, J. Algèbre linéaire. Cépaduès Éditions, Toulouse, 2011. 4e édition.

[12] Hitta, A. Cours d'algèbre et exercices corrigés. O.P.U., 1994.

[13] Liret, F., Martinais, D. Algèbre 1re année. Dunod, 2003. 2e édition.

[14] Mortad, M. H. Exercices Corrigés d'Algèbre, Première Année L.M.D., Edition "Dar el Bassair" (Alger-Algérie), 2012.

[15] Pierre, G. Matrices, géométrie, algèbre linéaire. Nouvelle bibliothèque mathématique.

Cassini, 2001. Traduction de Gabrielle Arnaudiès.

[16] Queysanne, M. Algèbre, collection U, Armand Colin, 1971.

[17] محمد حازي 2017 بوابة التحليل التفاضلي، الدوال ذات عدة متغيرات دروس مبسطة وتمارين منوعة. منشورات المجلس الأعلى للغة العربية، ديدوش مراد الجزائر.

[18] سعود محمد و بن عيسى لخضر، 2009 التحليل الرياضي جزء 1 ، ديوان المطبوعات الجامعية.

[19] قادة علاب 2010 عناصر من التحليل الرياضي (التوابع لمتغير حقيقي واحد) الجزء الأول عناصر من التحليل الرياضي (التوابع لمتغير حقيقي واحد) الجزء الأول. ديوان المطبوعات الجامعية.

Brahim Brahimi. Full professor in Mathematical Statistics affiliated to the laboratory of Applied Mathematics. Have a Ph.D. in Mathematical Statistics (2011), University Mohamed Khider, Biskra, Algeria. Technical Editor in Chief of Afrika Statistika Journal. Have a master and advanced Studies Diploma in Probability, Statistics and Optimizations (2003), University Badji Mokhtar, Annaba, Algeria. His research interests are in non-parametric statistics, statistical inference for incomplete data, rare events and applications to finance and insurance, extreme value theory and actuarial risk measures, copula modeling and multivariate statistics. He has published research articles in different international reputed journals of mathematics.